أقدم لك..

علم الرياضيات

تأليف
زياودن ساردر
جيرى رافتز
بورين فان لون
ترجمة
ممدوح عبد المنعم محمد
مراجعة وإشراف وتقديم
إمام عبد الفتاح إمام





Introducing... Mathematics

Ziauddin Sardar
&
Jerry Ravetz
Borin Van Loon



أقد

لي ... كثيرة
من ... ب على
القا ... ج إلى
شرح ... الفرق
بين ... ؟ وما
الريا

ك ... مبسطة
- عن فرويد ويونج وكلاين ونيوتن وهوكنج .... الخ.

وإذا كانت الأعداد الستة الأولى من هذه السلسلة قد عرضت لمجموعة من الفلاسفة لاستجلاء غوامض أفكارهم عن طريق الرسوم، والصور، والأشكال التوضيحية، فأننا نفعل الشئ نفسه بالنسبة للأفكار العلمية، عن الشعور، واللاشعور، والذهن، والمخ .... الخ. وغيرها من أفكار وإننا نأمل أن يجد فيها القارئ نفس المتعة السابقة.



المشروع القومى للترجمة

أقدم لك ...

علم الرياضيات

تأليف

زياودن ساردر

جيرى رافتز

بورين فان لون

ترجمة

ممدوح عبد المنعم

مراجعة وإشراف وتقديم

إمام عبد الفتاح إمام

المجلس الأعلى للثقافة

٢٠٠٢

رقم الإيداع بدار الكتب المصرية

٢٠٠٢/٤١٧١

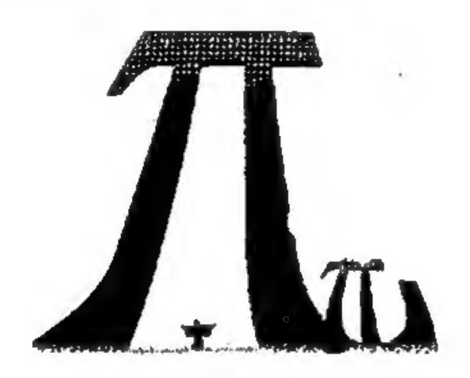
الترقيم الدولى I.S.B.N

977-5769-45-0

المشروع القومى للترجمة
إشراف: جابر عصفور

هذه ترجمة لكتاب

THE MATHEMATICS



Ziauddin Sardar
Jerry Ravetz and
Borin Van Loon

شارع الجبلاية بالأوبرا - الجزيرة - القاهرة. ت: ٧٣٥٢٣٩٦ فاكس: ٧٣٥٨٠٨٤
El Gabalaya St. Opera House, El Gezira, Cairo
Tel: 7352396 E.Mail: asfour@oncbox.com

«مقدمة»

بقلم المراجع

«أقدِّم لك.. هذا الكتاب!»

هذا هو الكتاب الحادى عشر فى سلسلة «أقدِّم لك..» وهو يدور حول « الرياضيات ...»

والواقع أن الرياضيات ترتبط بالفلسفة ارتباطًا دقيقًا منذ فجر الفلسفة عندما كتب أفلاطون على باب الأكاديمية «مَنْ لم يكن رياضيًا فلا نصيب له عندنا» أو «من لم يكن مهندسًا فلا يدخل علينا». وجعل الرياضيات مدخلاً إلى الفلسفة واشترط كلامه دراسة الرياضيات كخطوة تمهيدية لدراسة الفلسفة ـ ولقد كان برتراند رسل فى الفلسفة المعاصرة هو المثل النموذجى لهذه الرابطة ، فقد دخل إلى الفلسفة من باب الرياضيات عندما حاول تعريف «العدد» ، وكما حاول فى كتابه «أصول الرياضيات» أن يحدد معنى اللامعرفات..

وربما اشتركت الرياضيات أيضًا مع الفلسفة فى خاصيتين هامتين هما «التجريد» و «الصورية» ـ ولعل هذا هو السبب فى شكوى الناس من الرياضيات، ومن الفلسفة فى آن معًا. (لأن التفكير البشرى يبدأ بالمحسوسات ويتمسك بها ويجد صعوبة فى الانتقال من المحسوس إلى اللامحسوس أو المجرد!) ـ ولهذا السبب يبدأ المؤلف فى الصفحة الأولى من كتابه بالحديث عن شكوى الناس من الرياضة متصورين أن الناس ينقسمون قسمين أشخاص يفهمون الرياضيات (وهم نوع خاص من البشر) وأشخاص لا علاقة لهم بها!.

لكنه يبين لنا مدى حاجتنا إلى الرياضيات التى يرى أن الحياة لا يمكن تصورها بدونها. فنحن نحتاج إلى الرياضيات فى البيع والشراء، وفى التسوق، وإعداد ميزانية

المنزل، وإدارة أعمالنا، وبناء منازلنا، دائماً في أعمالنا المصرفية، وعمل الخرائط، والسفر حول العالم بل حتى إلى الخروج من عالمنا إلى الفضاء الخارجي! بل إن الرياضيات ضرورية للعلم والاقتصاد والطب والتكنولوجيا باختصار هي المحرك الذي يحرك حضارتنا الصناعية !.

ثم يبدأ المؤلف في الحديث عن «علم الحساب» وتاريخه ومساره مع مراحل البشرية والحضارات القديمة، وهو العلم الذي بدأ عند القبائل البدائية بالعدّ فالعدّ قديم قدم الكتابة أو لعلّه أقدم منها، فقد استخدم الإنسان الأول الخطوط القائمة للدلالة على الأرقام، فرسم الواحد هكذا I والاثنين هكذا II والثلاثة هكذا III .. الخ، واستخدم الصينيون هذا الأسلوب حتى الخمسة IIIII ، ثم عبروا عن الستة بخط قائم يعلوه خط أفقي هكذا T ، وعن السبعة بخطين قائمين يعلوهما خط أفقي TT وعن الثمانية بثلاثة خطوط يعلوها خط أفقي TTT وهكذا.

أما المصريون القدماء فقد رمزوا إلى الواحد بخط قائم I، وللاثنين بخطين قائمين II ورمزوا للعشرة بباب مقنطر ضيّق ∩، ومعظم طرائق العد مبنية على أساس الخمسة باعتباره عدد أصابع اليد الواحدة، أو على العشرة باعتبار عدد أصابع اليدين الاثنتين، أما البابليون فاتخذوا من الستين وحدة عددية، ودوّن اليونان الأعداد بالحروف الهجائية فجعلوها حرف a للواحد، وحرف b للاثنين، وهكذا حتى العشرة، واعتبروا الـ ف الحادي عشر مقابل العشرين، والحرف الثاني عشر مقابل الثلاثين .. وهكذا.

أما الهنود فقد جعلوا للأرقام رموزاً مستقلة هي ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ .. الخ، واخترعوا الصفر، لكنهم لم يحسنوا استغلال تلك الأرقام ولم يفيدوا من اختراع الصفر.

ولقد أخذ العرب هذه الأرقام والصفر عن الهنود وعن العرب أخذ الغربيون الأرقام الهندية وسموها الأرقام العربية، وأخذوا الصفر أيضًا باسمه العربي «صفر» (أي فارغ أو خال) ولفظ Cipher في الإنجليزية (ومعناها صفر أيضًا) خير دليل على ذلك، ويقال : إن اختراع الصفر كان من أهم المنجزات الفكرية وبدون ما كانت الرياضيات الحديثة أمرًا ممكنًا..

والواقع أن الكتاب يعطي للحضارة العربية دوراً عظيمًا فيما أسهمت به في تاريخ

الرياضيات فنراه يقول صراحة : «قام المسلمون بتوحيد الفكر الرياضى فى جميع الحضارات السابقة عليهم فأدمجوا الجبر والعلاقات الحسابية البابلية والصينية والهندية بالعلاقات الهندسية اليونانية والهلنستية، وينتهى إلى أنهم كانوا على درجة عالية جدًا من الجرأة فى «تعاملهم مع العمليات الحسابية» ثم يتحدث عن شخصيات عظيمة مثل الخوارزمى «مؤسس علم الجبر» وتطويره عند «الصموعل» والكراجى، وعمر الخيام االشاعر وعالم الرياضيات، والبطانى وغيرهم من أعلام المفكرين المسلمين..

والكتاب فى الواقع متعة لا تقدر حتى بالنسبة لغير المتخصص ، وإننا لنأمل أن نكون بترجمته قد قدمنا خدمة متواضعة فى المشروع القومى للترجمة.

والله نسأل أن يهدينا جميعًا سبيل الرشاد،،

المشرف على المشروع

إمام عبد الفتاح إمام

لماذا الرياضيات ؟

يئن كل شخص عند الذكر المطلق للرياضيات ، فالكثير من الناس يعتقدون أن العالم مقسم إلى نوعين من الناس . الأول هم الأشخاص بالغو الذكاء الذين يفهمون الرياضيات وهم بالطبع ليسوا من النوع الذى يمكن مقابلته فى إحدى حفلات السمر ...



ولكننا جميعاً نحتاج لفهم الرياضيات إلى حدٍ ما، فبدون الرياضيات لا يمكن تصور الحياة.





فى الواقع أصبحت الرياضيات دليلنا للعالم الذى نعيش فيه، العالم الذى نشكله ونغيره والذى نعتبر نحن جزءاً منه. ولأن العالم أصبح معقداً لدرجة كبيرة وكذلك الأشياء المشكوك فيها أصبحت مهمة ومتذرة ، فنحن نحتاج الرياضيات لوصف المخاطر التى نواجهها ولنخطط لمعالجتها.

وتتطلب قدرة التعامل مع الرياضيات موهبة خاصة ومهارة مثل أى مجال آخر للمحاولات البشرية كالرقص مثلاً. والرياضيات أنيقة جداً وجميلة فى روحها تماماً مثل الأداء الجاد المعقد لفرقة الباليه الماهرة. وبالرغم من أن معظمنا لا يستطيع أن يكون راقص باليه محترف لكننا نعرف كيفية الرقص وفعلياً من الممكن أن نرقص . وبالمثل يجب أن نعرف جميعاً ما تتناوله الرياضيات وأن تكون لدينا القدرة على فهم ومعالجة بعض الخطوات الأساسية.



الحساب

يتعلم الأطفال
في المدرسة
كيفية العد
والحساب والقياس
وبمجرد تعلمهم ذلك تبدو هذه الطرق
أنها ابتدائية، ولكن بالنسبة للمبتدئين تبدو أنها
مليئة بالألغاز.
أصبحت عملية تسمية الأرقام مثل التعويذة وخاصة
عند التعامل مع أكبر رقم، فالعد إلى مائة ممل
ولكن العد إلى ألف يشبه تسلق الجبال !
ترى ما هو الرقم الأخير أو أكبر الأرقام على
الإطلاق ؟



كيف أسمينا الأرقام كما نقرؤهم واحداً تلو الآخر، ربما يكفى تسمية عدد قليل من الأرقام. تستطيع بعض الحيوانات تمييز التجمعات المختلفة حتى خمسة أو سبعة أفراد، وما يزيد عن ذلك يطلق عليه «العديد» فقط. ولكن إذا كنا نعرف أن الأرقام تزداد دون توقف فلا يمكننا إطلاق الأسماء الجديدة بدون توقف.



لم تكن لغة الهنود Dakota [١] مكتوبة ولكنها كانت عبارة عن قطعة من القماش مرسوم عليها صور بالحبر الأسود، وفى كل سنة يتم رسم صورة جديدة لتوضيح الحدث الرئيسى فى السنة المنقضية.

(١) الداكوتا Dakota ـ قبيلة من الهنود الحمر في الولايات المتحدة الأمريكية تستخدم لغة خاصةبها هي اللغة السوانية Siouan (المراجع).

وأفضل طريقة لعملية تنظيم التسمية والعد هى اتخاذ «أساس» وهو عبارة عن رقم يميز بداية العد مرة أخرى. وأبسط أساس هو اثنان، فعلى سبيل المثال قامت مجموعة من الأستراليين البدائيين (Gumulgal) بالعد بالطريقة التالية :

١ = أورابون

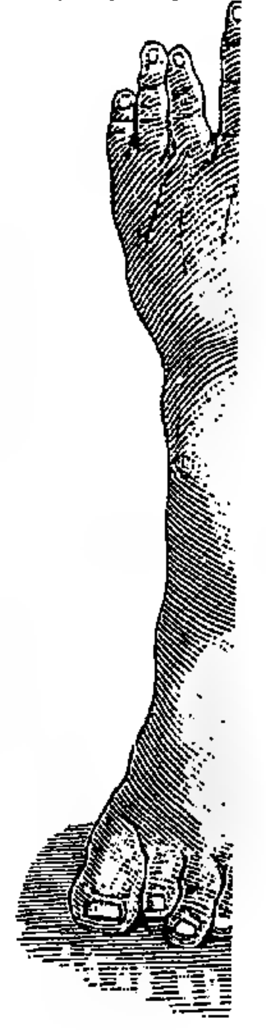
٢ = أوكاسار

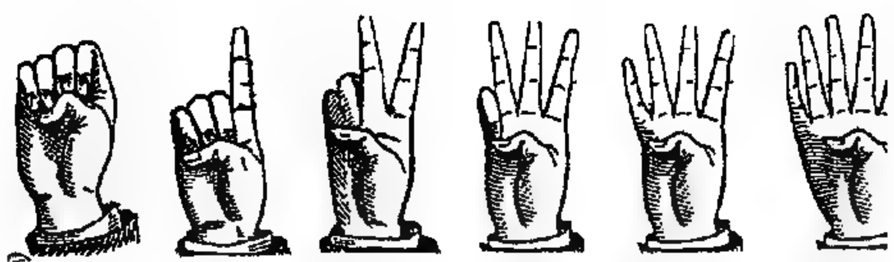
٣ = أورابون - أوكاسار

٤ = أوكاسار أوكاسار

٥ - أوكاسار - أوكاسار- أورابون.







وتعتبر أصابع اليد مفيدة في تعريف الأساسات، بعض الأنظمة تستخدم الخمسة كأساس والبعض الأكثر شيوعاً يستخدم العشرة. ويمكن استخدام العديد من الأساسات الأخرى. فعلى سبيل المثال العملة المتداولة في بريطانيا قديماً كان بها العديد من الأساسات : إثنا عشر (بنس في كل شلن) وبعد ذلك عشرون (شلن في كل جنيه استرليني) وحتى واحد وعشرون (شلن في كل جنيه إنجليزي). لذلك كان يلزم وجود مساعدين في الأسواق للمساعدة في عمليات تقدير الفواتير أما عند الشراء بالتقسيط فربما يتم إخبار الناس أن رداء غرفة المعيشة يتكلف ١٥٥ جنيهاً إنجليزياً أو ما يعادل ١٠٤ قسط أسبوعي قيمته جنيه استرليني وخمسة عشر شلناً وسبعة بنسات ونصف.

هناك أساس آخر شائع وهو عشرون (أصابع القدمين واليدين) وقد استخدمه الـ (Yoruba) بالإضافة إلى خاصية الطرح عند التعبير عن الأرقام الكبيرة داخل هذا الأساس.

وقد كان لديهم أسماء مختلفة الأرقام واحد (أوكان) وحتى عشرة (إيوا). ومن إحدى عشر وحتى أربعة عشر كانوا يقومون بعملية الإضافة مثل إحدى عشر هو (واحد بالإضافة إلى عشرة) وأربعة عشر هو «أربعة مضافون إلى عشرة». أما الأرقام من خمسة عشر وحتى تسعة عشر فكانوا يقومون بالطرح مثل خمسة عشر هي «عشرون ناقصة خمسة» وتسعة عشر «هي عشرون ناقصة واحد».

ويظل هذا الأساس مستخدماً في الأرقام الفرنسية حيث إن ثمانين هي «أربعة عشرونات» أما تسعة وتسعون فهي أربعة عشرونات وتسعة عشر.



وعلى ذلك لا يوجد هناك أساس واحد مفضل، ربما يمكننا التفكير فى نظام أرقام يتم تصميمه بصفات مختلفة وهى يسهل تَذَكُّرُه وملائم فى تسميته ومفيد فى الحساب إلخ.



الأرقام المكتوبة



من الممكن العد بطريقة فعالة في ثقافة ما دون كتابه، ولكن الحساب يتطلب عند ذلك ذاكرة كبيرة ومهارات خاصة.
ولما كانت الكتابة منتشرة في الكثير من الحضارات، ظهرت العديد من أنظمة العد، البعض منها كان معقداً تماماً.

وقد استخدم الأزتك(*) نظاماً مبنياً على عشرين به أربعة رموز

الواحد رُمز له بنقطة تعبر عن حبة الذرة.
٢٠ تم تمثيلها بعلم.
٤٠٠ تم تمثيلها بنبات الذرة.
٨٠٠٠ تم تمثيلها بدمية الذرة.

ويمكن استخدام هذه الرموز للتعبير عن كل أنواع الأرقام وعلى سبيل المثال الرقم ٩٢٨٧ يمثل كذلك :

(*) الأزتك : شعب متمدن حكم المكسيك قبل أن يفتحها الأسبان.



وكان نظام الترقيم عند الـ «Mayans» به ثلاثة رموز فقط :
١
٢
٣
٤
٥
٦
٧
٨
٩
١٠
١١
١٢
١٣
١٤
١٥
١٦
١٧
١٨
... نقطة كبيرة •
كانت هي الواحدة
... الشَّرطة ــ
كانت هي الخمسة
... وكانت صدفة القوقع
هي الصفر
لذلك
٣ هي
أما ١٣ فهي
ويتم تمثيل العشرين بـ

ولقد استخدم المصريون القدماء مخطوطة تصويرية (الهيروغليفية) لكتابة أرقامهم.



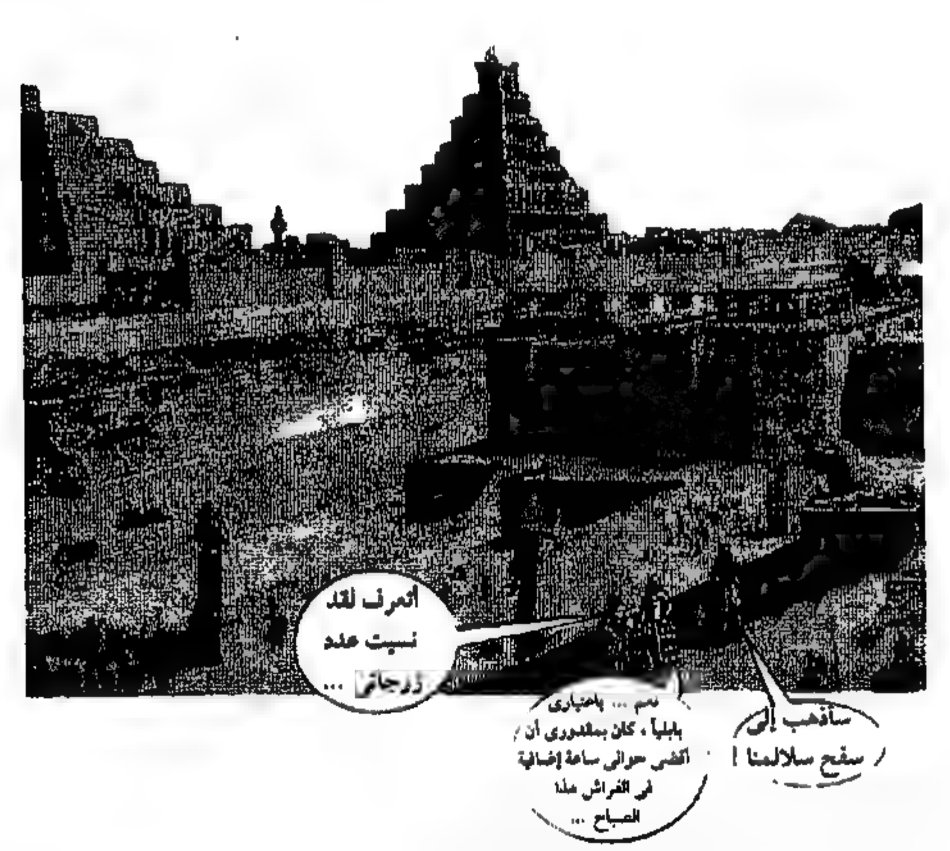
وقد استخدم البابليون نظاماً يتخذ من ٦٠ ومضاعفاته أساساً له بالرموز التالية :

٣٦٠٠ ٦٠٠ ٦٠ ١٠ ١

بعد ذلك قاموا بتطوير نظام مبنى فقط على قيمتين :

ترمز للواحد أو ٦٠ على حسب موقعها و ترمز للعشرة

لذلك يمكن كتابة ٩٥ على النحو التالى :
٩٥ = ٦٠ (١) + ٣٥



ولقد بقى النظام الستونى البابلى حتى هذه الأيام، فالدائرة تحتوى على ٣٦٠ درجة والساعة بها ٦٠ دقيقة ، وتحتوى الدقيقة على ٦٠ ثانية.

وقد استخدم الصينيون القدماء نظام أعداد له أساس ١٠ برموز للأرقام من واحد وحتى عشرة والمائة والألف وكذلك العشرة آلاف ، وبعد ذلك طور الصينيون صيغة للعد باستخدام قطع مستقيمة (سيقان).



(*)مصفحة : صفيحة طباعية تصنع بصب المعدن في قالب من الورق المعجون.

وقد قدم الصينيون اختراعاً عظيماً وهو وضع الرموز المكتوبة فى عالم من الأسماء المنطوقة للأرقام، وكان هذا عبارة عن نظام لـ «القيمة المكانية». حيث تعتمد تسمية الرقم (كتعبير عن الكمية) على مكانه فى صف الأرقام. لذلك من الممكن أن يكون الرقم (٢) هو اثنان أو عشرون أو مائتان على حسب موقعه، وهذا يعني أنه لا يلزم تسمية الأساسات الأعلى ، فمن المعروف أن (٢) في الرقم (٢٣٤) تعنى ٢٠٠.



أما الهنود فقد طوروا ثلاثة أنواع واضحة لأنظمة الأعداد.

قام (Kharosthi) باستخدام رموز للعشرة والعشرين وتم التعبير عن الأرقام من ١ حتى ١٠٠ بالجمع.

أما الـ (Brahmi) فقد استخدموا رموزاً منفصلة للواحد، الأربعة حتى التسعة والعشرة والمائة ، وهكذا.

أما Gwalior فكان لديهم رموز للأرقام من واحد وحتى التسعة وكذلك للصفر.



ولقد قام الهنود بالتعامل مع الأرقام الكبيرة براحة تامة، حيث أعطت النصوص الهندية القديمة أسماء لأرقام كبيرة مثل ١٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠ وأسموه (باراردها Parardha).

وكان للقدماء اليونانيين نظامان متوازيان للأعداد، الأول كان مبنياً على الأحرف الأولى للأعداد، مثلاً يرمز للخمسة بالحرف باى (π) أما العشرة فيرمز لها بدلتا (Δ) والمائة بالصيغة القديمة للحرف (H) وهكذا.

أما النظام الثانى والذى ظهر فى القرن الثالث قبل الميلاد فقد استخدم كل حروف الهجاء اليونانية وثلاثة من الحروف الفينيقية ليصبحوا سبعة وعشرين رمزاً رقمياً. وكانت أول تسعة أحرف ترمز للأرقام ١ حتى ٩، أما التسعة التالية فكانت ترمز للعشرات من ١٠ وحتى ٩٠ أما التسعة أحرف الأخيرة فكانت ترمز للمئات من ١٠٠ وحتى ٩٠٠.

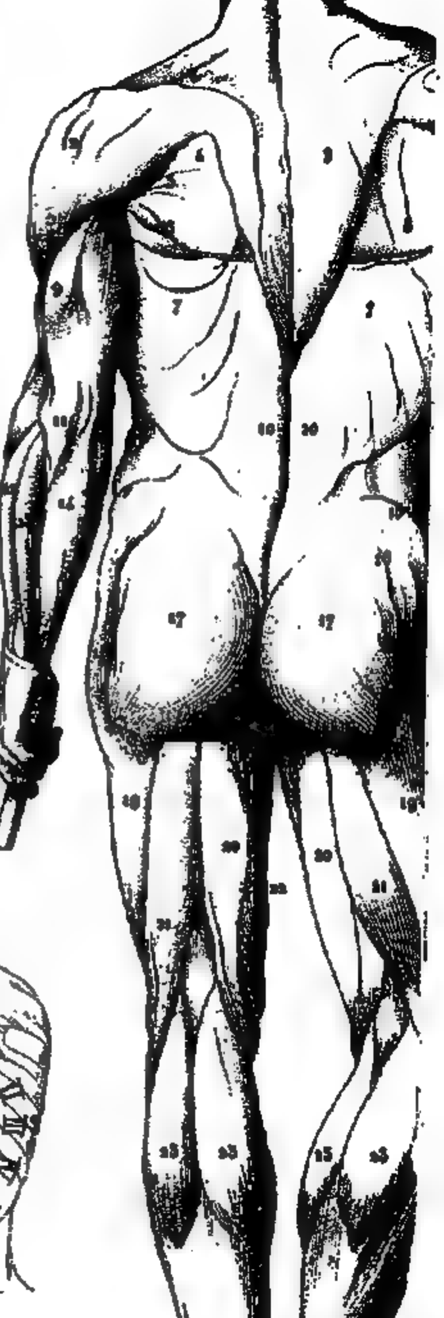


أما النظام الرومانى فكان يحتوى على عدد سبعة رموز للأرقام : I يعبر عن ١ ، و V يعبر عن ٥ ، وX يعبر عن ١٠ ، وL يعبر عن ٥٠ ، وC يعبر عن ١٠٠ ، وD يعبر عن ٥٠٠ ، و M يعبر عن ١٠٠٠.

وكانت الأرقام تكتب من اليسار إلى اليمين حيث تكتب الأرقام ذات القيمة الكبيرة فى اليسار ثم تُجمع مع بعضها لتعطى قيمة الرقم المشار إليه.

وعلى ذلك LX هو ٦٠.

وللملاحمة، كان الرقم ذو القيمة الصغيرة الموضوع على اليسار يُفسر بالطرح، وعلى ذلك الرقم McM يعنى ١٩٠٠.



والأرقام الرومانية بالرغم من أنها لا تزال تستخدم الآن كوسيلة للتزيين، إلا أنها لم تكن مناسبة لعمل الحسابات السريعة.





وقد أدى استخدام حروف الهجاء للتعبير عن الأرقام إلى ظهور فن التنبؤ العالى فى تطوره والذى يسمى Gomatria . ويقوم أحد الأشخاص بترتيب أحرف كلمة ما أو اسم على وجه الخصوص ليكون رقماً ما ثم يقوم بتفحصه للبحث عن نوع ومعنى لهذا الرقم. والشخص الذى ينتج اسمه رقماً مثل ٦٦٦ (عدد الحيوانات فى التوراة) كان يوضح شيئاً سيئاً !



وقد طورت الحضارة الإسلامية (منذ ٦٥٠ بعد الميلاد وحتى الآن) مجموعتين متشابهتين من الأرقام. كانت واحدة منهم تستخدم فى الجزء الشرقى (بلاد العرب وفارس).

أما الأخرى فكانت تستخدم فى الجزء الغربى (بلاد المغرب والأندلس). وكلتا المجموعتين كانت تحتوى على عشر رموز من الصفر وحتى التسعة.

المجموعة الشرقية : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

المجموعة الغربية : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

وقد بقيت المجموعة الشرقية تستخدم حتى الآن فى العالم العربى، أما المجموعة الغربية والتى تدعى الأرقام العربية فهى تمثل نظام الأرقام الذى نستخدمه جميعاً فى هذه الأيام.



الصفر

يعتبر الصفر اختراعاً متأخراً نسبياً (حيث تم وضعه فى القرن السادس بعد الميلاد)، ويبدو أنه ناتج عن ارتباط الحضارتين الصينية والهندية. وقد كان الصينيون يحتاجونه للتعبير عن قيمة المكان ـ كيف مثل الصينيون المكان الخالى فى الرقم مئتين وخمسة ؟

والرقم ٢٥ يعتبر خطأ لذلك كان يلزم شيء ما يوضع فى المكان الخالى مثل ٥ ـ ٢. لكن المعنى الكامل للصفر كان قد تم تطويره فى الحضارة الهندية، حيث إن التأملات الفلسفية فى الفراغ كانت قد تطورت بدرجة كبيرة.



وهذا النوع من الخلفية الثقافية كان ضرورياً جداً للاختراع، وللصفر على وجه الخصوص. والصفر يمكن أن نتعامل معه مثل بقية الأرقام حيث إننا من الممكن أن نقوم بالجمع عليه.



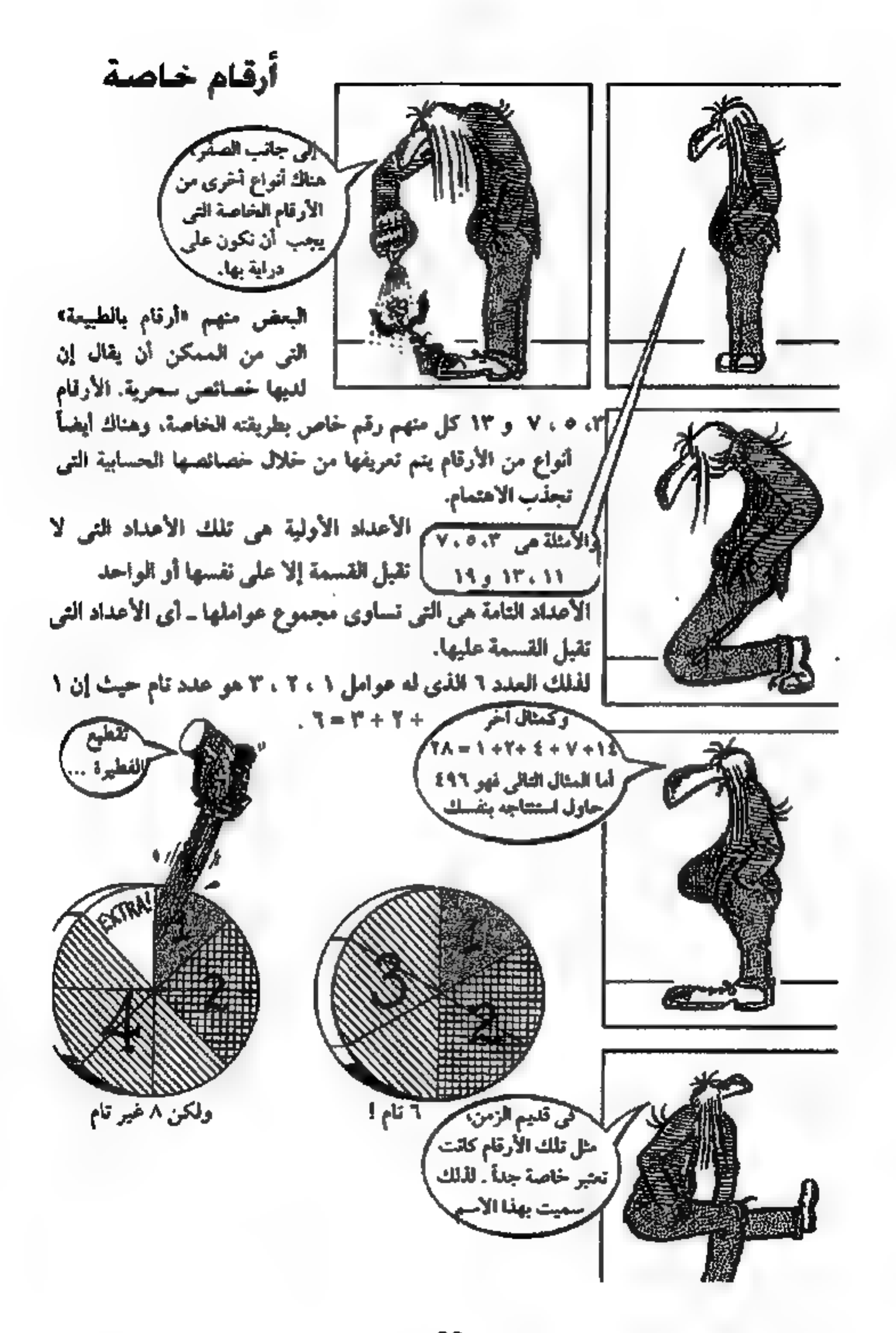
وبينما يعتبر الصفر ضرورياً في الحسابات ولكنه يُستبعد في العد. فأول شيء في صف أشياء لا يقال له «الصفرى». وهناك تناقض واضح في التقويم الميلادى : تسمى الفترة ١٩٠٠ - ١٩٩٩ بالقرن العشرين حيث لم يكن هناك قرن صفرى في بداية التقويم الميلادى.

والصفر له معنيان كما هو واضح من «أضحوكة الصفريات»، حيث يتحدث مرشد في أحد المتاحف إلى المجموعة المدرسية :



... كما قد تعلمته في المدرسة ! لم يقم أحد بإخبارها أن الأصفار بعد ٦٥ كانوا مجرد ملء خانات وليسوا للعد. فبالنسبة لتلك الأصفار لدينا ٤ X ٠ = ٠ وكذلك ٤ + ٠ = ٠ ! ربما الوعي بتلك التناقضات هو الذي جعل الرياضيين الأوائل مرتابين من الأرقام الغريبة مثل الصفر.

أرقام خاصة



البعض منهم «أرقام بالطبيعة» التى من الممكن أن يقال إن لديها خصائص سحرية. الأرقام ٣، ٥، ٧ و ١٣ كل منهم رقم خاص بطريقته الخاصة، وهناك أيضاً أنواع من الأرقام يتم تعريفها من خلال خصائصها الحسابية التى تجذب الاهتمام.

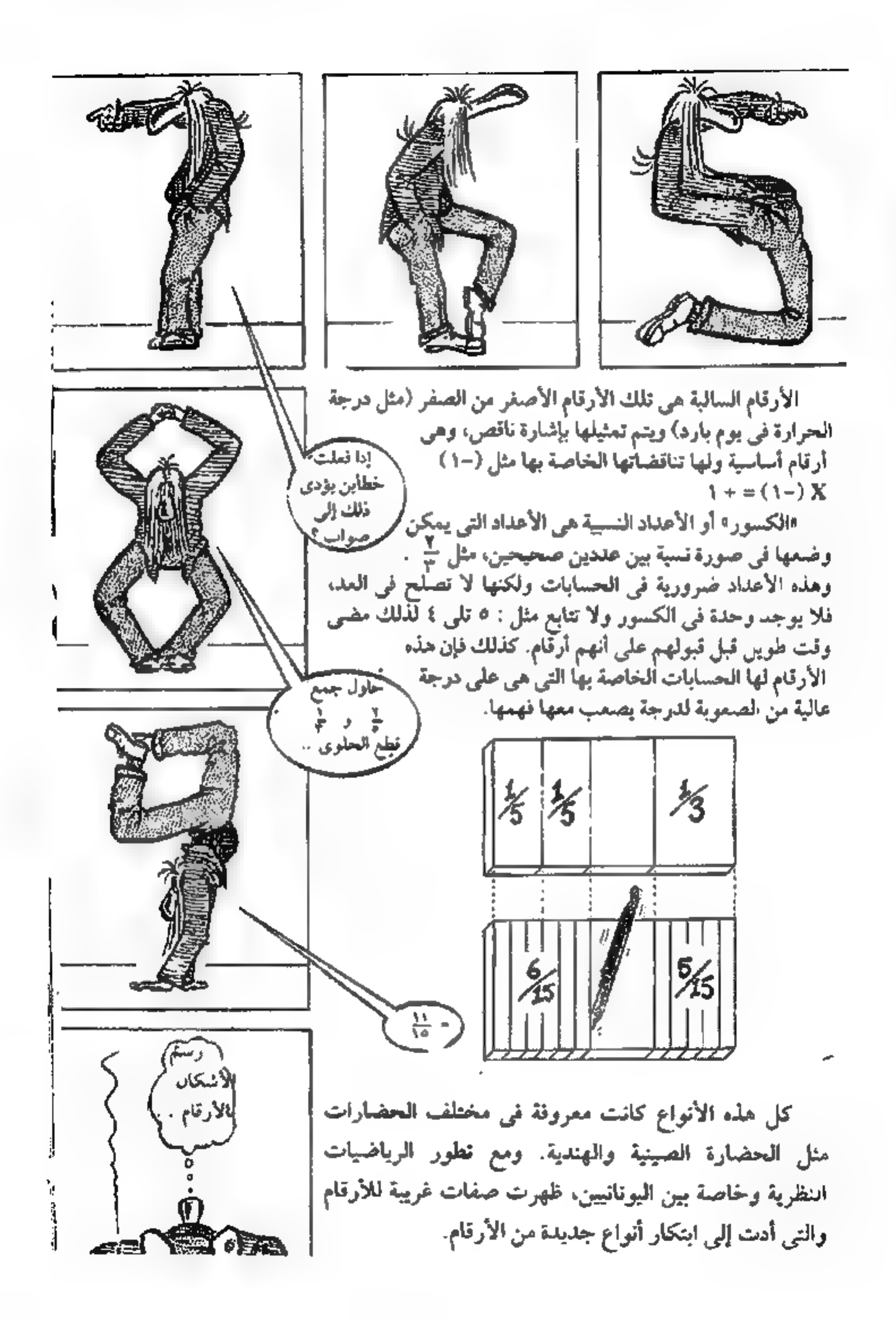
الأعداد الأولية هى تلك الأعداد التى لا تقبل القسمة إلا على نفسها أو الواحد

الأعداد التامة هى التى تساوى مجموع عواملها ـ أى الأعداد التى تقبل القسمة عليها.

لذلك العدد ٦ الذى له عوامل ١، ٢، ٣ هو عدد تام حيث إن ١ + ٢ + ٣ = ٦.

٦ تام !

ولكن ٨ غير تام



الأرقام السالبة هى تلك الأرقام الأصغر من الصفر (مثل درجة الحرارة فى يوم بارد) ويتم تمثيلها بإشارة ناقص، وهى أرقام أساسية ولها تناقضاتها الخاصة بها مثل (-١)

X (-١) = + ١

«الكسور» أو الأعداد النسبية هى الأعداد التى يمكن وضعها فى صورة نسبة بين عددين صحيحين، مثل $\frac{٢}{٣}$. وهذه الأعداد ضرورية فى الحسابات ولكنها لا تصلح فى العد، فلا يوجد وحدة فى الكسور ولا تتابع مثل : ٥ تلى ٤ لذلك مضى وقت طويل قبل قبولهم على أنهم أرقام. كذلك فإن هذه الأرقام لها الحسابات الخاصة بها التى هى على درجة عالية من الصعوبة لدرجة يصعب معها فهمها.

كل هذه الأنواع كانت معروفة فى مختلف الحضارات مثل الحضارة الصينية والهندية. ومع تطور الرياضيات النظرية وخاصة بين اليونانيين، ظهرت صفات غريبة للأرقام والتى أدت إلى ابتكار أنواع جديدة من الأرقام.

الأرقام غير النسبية وهى الأرقام التى لا يمكن التعبير عنها بنسبة بين رقمين صحيحين .

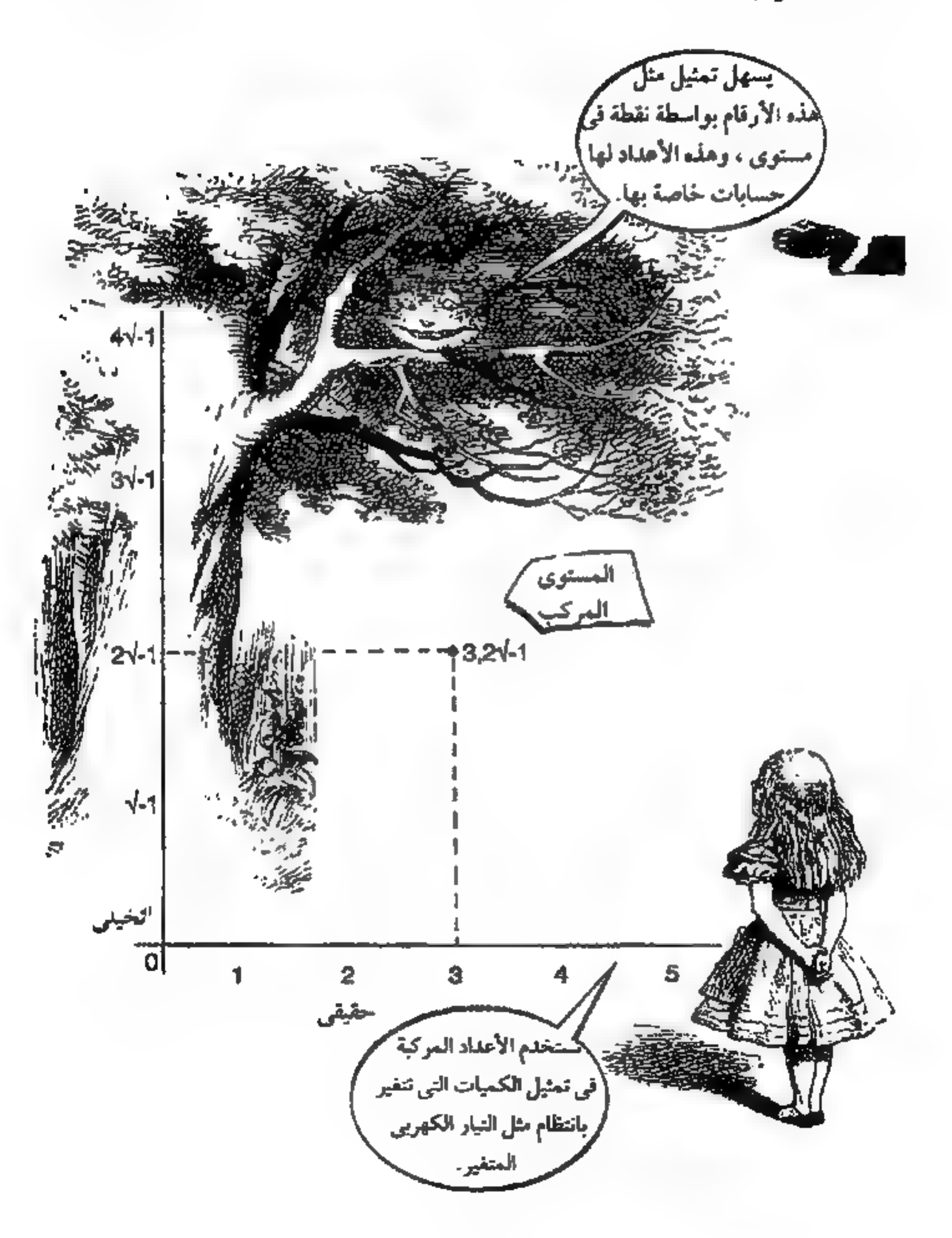
و $\sqrt{2}$ هو مثال هام لتلك الأرقام حيث إنه ينتج من العمليات الهندسية فهو طول وتر المثلث قائم الزاوية الذى به طول ضلعى القائمة الوحدة.

ونسمى هذه الأرقام بالجذور الصامتة.



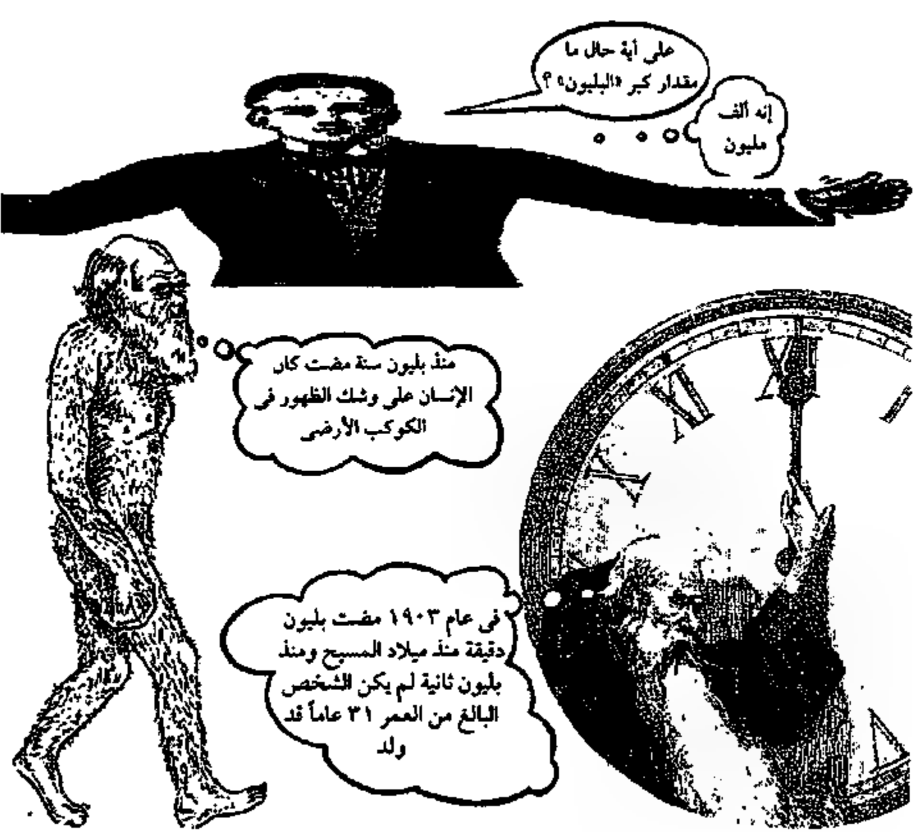
وعملية اختصار هذه النسب إلى جذور صماء نسمى «تربيع الدائرة» وقد حاول فى ذلك علماء الرياضة على مدى قرون حتى تم توضيح أن هذه عملية مستحيلة فى الأيام المعاصرة عند ذلك تمت تسمية هذه الأرقام ! ...

الأعداد التخيلية تنتج من ضرب الأعداد الحقيقية بالكمية التخيلية، وهى الجذر التربيعى لسالب واحد (√-١). وعند إضافة عدد تخيلى لآخر حقيقى يسمى الناتج "الأعداد المركبة".



الأرقام الكبيرة

تقوم الأرقام الكبيرة بإرهاب الكثير منا لدرجة أننا نجد صعوبة فى تقدير القيمة الحقيقية لتلك الأرقام.



ويبدو المائة مليون رقماً أكثر ترويعاً، ولكن فى هذه الأيام يعتبر رقماً غير عادى بالنسبة لدولة ما، وخاصة بالنسبة لدولة نامية (أي تكون مدينة بمثل هذا الدين). ولو أن هناك دولة أرادت التخلص من دَينها قامت بدفع دولار، أو جنيه واحد كل ثانية على مدار أربع وعشرين ساعة يومياً وسبعة أيام أسبوعياً واثنين وخمسين أسبوعاً سنوياً، ربما تستغرق ٣١٨٠ سنة لسداد ...



وكيفية الوصول إلى هذه الأرقام الكبيرة بسهولة يتم توضيحه بمثال بسيط وهو الخطاب المتسلسل. يقوم شخص ما بإرسال خطابين إلى شخصين يخبر كلاهما بإرساله إلى اثنين آخرين وهكذا. فى هذه الحالة قام الشخص الأول بإرسال خطابين، وفى المرحلة الثانية تم إرسال ٢ X ٢ = ٤ خطابات أما المرحلة الثالثة ففيها ٢ X ٢ X ٢ = ٨ خطابات. إذن كم عدد المجموعات المطلوبة للوصول إلى بليون خطاب ؟



الأسس



من الواضح أن كتابة البليون مرهقة جداً، ولحسن الحظ توجد نظرية ملائمة لكتابة الأرقام الكبيرة. ومن الممكن أن نلاحظ ذلك من خلال البليون الذى يساوى :

١٠ X ١٠ X ١٠ X ١٠ X ١٠
X ١٠ X ١٠ X ١٠ X ١٠ .

لذلك إذا رمزنا لحاصل ضرب عشرتين ببعض بالرمز $١٠^{٢}$ وحاصل ضرب ثلاث عشرات بـ $١٠^{٣}$ وهكذا من الممكن كتابة المليون هكذا $١٠^{٦}$

أما البليون فيصبح $١٠^{٩}$، بالاضافة إلى ذلك نكتب خمسة بليون هكذا ٥ X $١٠^{٩}$.

وعملية رفع أى شيء إلى أس ما تعنى أن هذا الشيء يضرب فى نفسه عدداً من المرات مساو لهذا الأس، لذلك $٢^{٥}$ تعنى ٢ X ٢ X ٢ X ٢ X ٢ أو ٣٢.

ومن الممكن أن نُزيد أُلفتنا مع هذه الملاحظات بتفقد المثال التالي :



أصغر رقم في هذه الاحتمالات هي $٢^{٢} = ٢^{٤} = ١٦$ ، يليه ٢٢٢ ثم بعد ذلك $٢٢^{٢} = ٤٨٤$ وأكبر رقم هو $٢^{٢٢} = ٤١٩٤٣٠٤$.

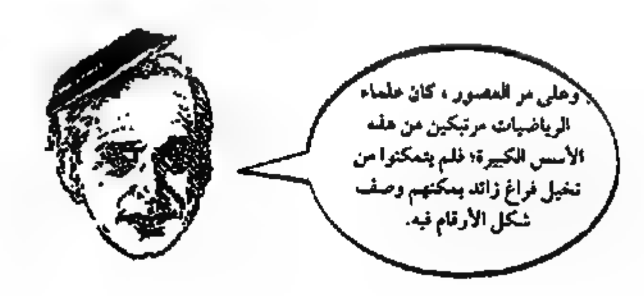
وكتابة الأســس تصلح أيضاً في حالة الكسور ، ولتحويل أس ما إلى كسر نقوم ببساطة بوضع إشارة سالب أمام الأس ، لذلك $١٠^{-١} = \frac{١}{١٠}$ ، $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ ، $١٠^{-٣} = \frac{١}{١٠٠٠}$ وهكذا.



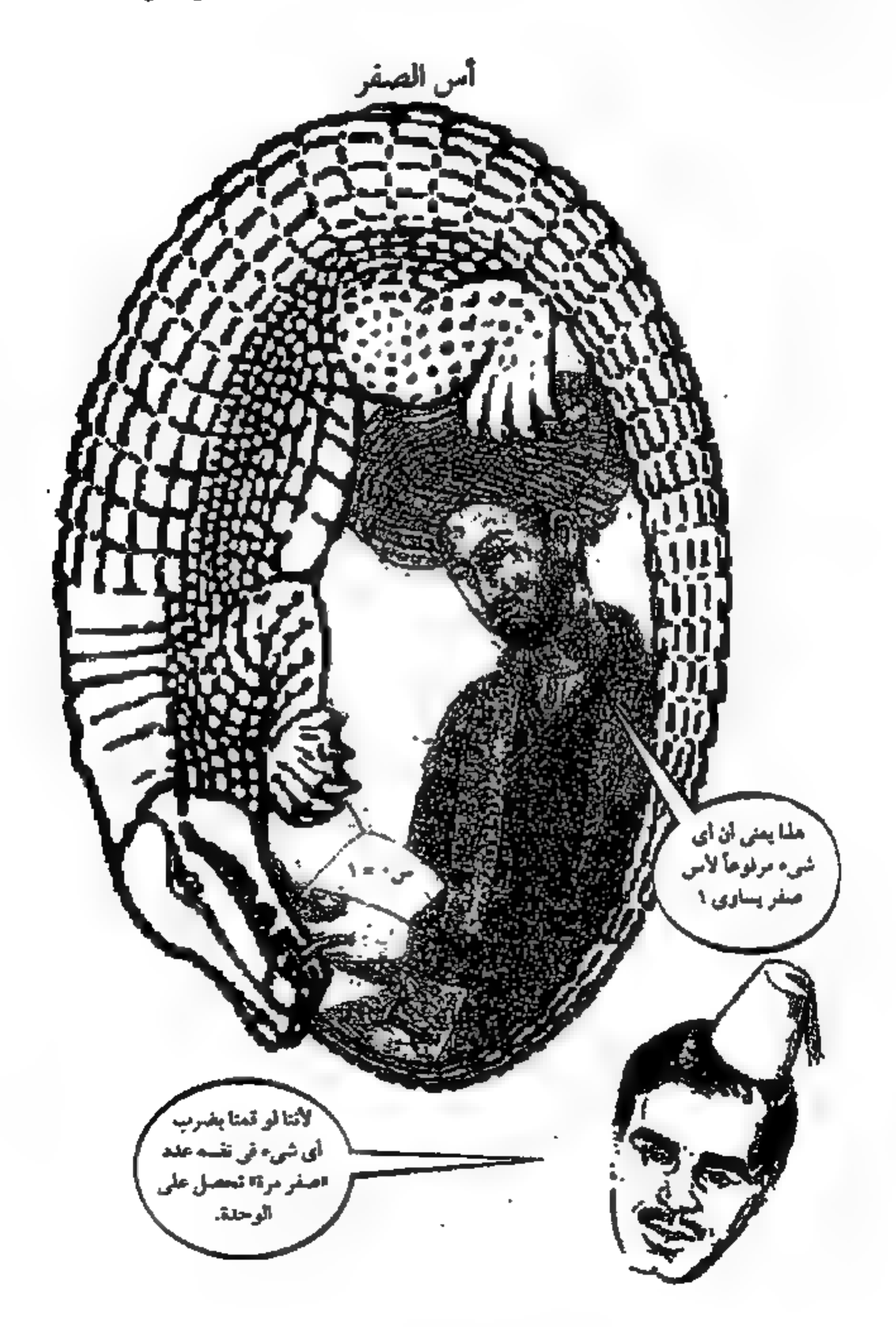
وبنفس الطريقة إذا كبرنا خريطة أو رسمة ما عدد س من المرات، فإن عدد س٢ ضعفاً من الورق يكون مطلوباً لذلك.

ونسمي س، س^{٢}، س^{٣}، س^{٤}، س^{٥} بالأس الأول، والثاني ، والثالث ، الرابع ، الخامس لـ س على الترتيب. وكان يطلق على الأسس في البداية «التربيع» و«التكعيب» من خلال مفاهيم الهندسي.

وبالطبع بدلاً من ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من الممكن أن يكون هناك أي أس آخر؛ باستخدام «ن» لتعبر عن أي رقم نقول : إن س ^{ن} تسمى الأس النوني لـ س.



وقد قدم عالم الرياضيات المسلم «ابن يحى الصموعلى» (المتوفى عام ١١٧٥) فى كتابه «الباهر» (الذى ألفه عندما كان عمره تسعة عشر عاماً) لأول مرة تعريف ...



اللوغاريتمات



اللوغاريتم هو الأس الذى يُرفع إليه رقم ما ليعطى رقماً آخر، ويسمى الرقم الأول الأساس. وحيث إن ١٠ ^٢^ = ١٠٠ فهذا يعنى أن لو ١٠ ١٠٠ = ٢، وتقرأ كالتالى : لو للأساس ١٠ للرقم ١٠٠ يساوى اثنين.

والأساسات الأكثر شيوعاً للوغاريتمات هى ١٠. والعدد الأسى e (أو الأساس الطبيعى، انظر صفحة ١٠٥).

وحيث أن س ^٠^ = ١ لأى س فهذا يعنى أن لو ١ = صفر لأى أساس.

ولضرب أو قسمة تعبيرين لوغاريتميين نقوم باستخدام القاعدة «ضرب أو قسمة أس رقم ما يعبر عنه بجمع أو طرح الأسس»، لذلك لو (س X ص) ببساطة يساوى لو س + لو ص.

واللوغاريتمات تعتبر ذات نفع عظيم فى تبسيط الحسابات الطويلة المعقدة. فللقيام بعملية ضرب أو قسمة عددين كبيرين نقوم أولاً باستخراج لوغاريتماتهم من الجدول ثم نجمعهم أو نطرحهم ونضع الناتج فى الجدول لاستخراج المجموع (أو خارج القسمة).

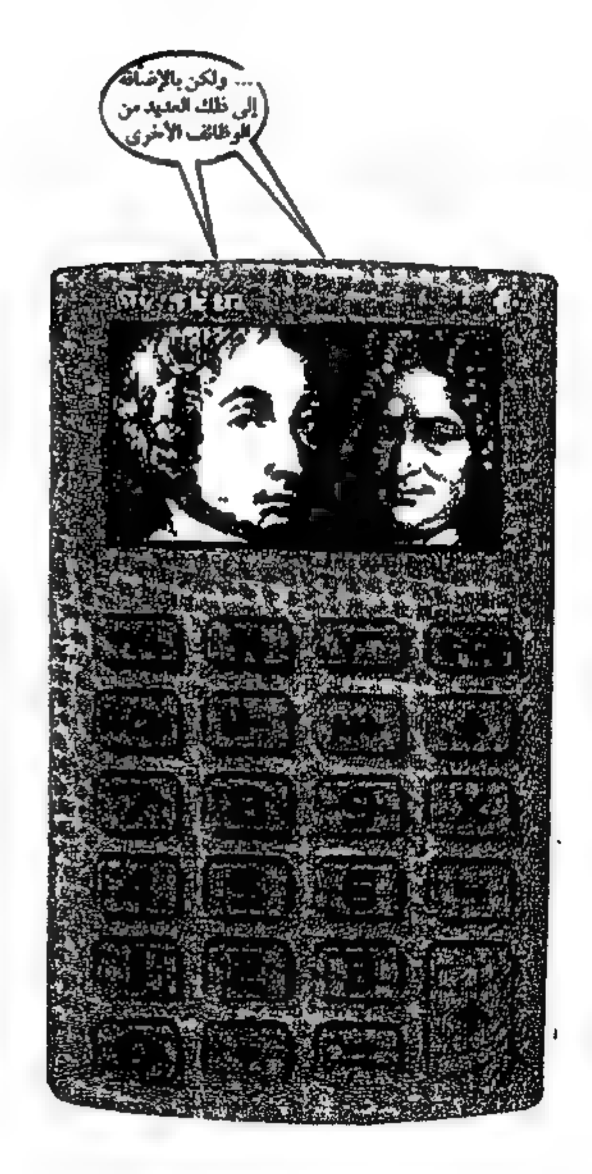
وكانت أول الجداول تلك التى أنشأها عالم الرياضيات الاسكتلندى جون نابير (١٥٥٠ - ١٦١٧)، وكانوا للأساس الطبيعى e. وقد أطلق عليهم «طبيعى» نسبة للأساس، أو «نابيريان» نسبة إلى مخترعهم.

الحساب

عملية ضرب الأرقام من كل الأنواع والحصول على ناتج تسمى الحساب، وهو متضمن في كل العمليات الرياضية. وكان الحساب يتم في البداية باستخدام الحصى كما كان يفعل اليونانيون القدماء باستخدام الحصى للقيام بالحسابات الأولية. وأصل كلمة يحسب Calculate في اللغة الإنجليزية هي كلمة «Calculus» اللاتينية والتي تعني «حصاة».

وحتى هذه الأيام يعتبر عداد أباكوس (ذو الخرزات على الأسلاك) هو أوسع جهاز عد انتشاراً. وحتى في هذه الأيام، المستخدم الماهر لهذا العداد يستطيع أن يعد الخرزات أسرع من الوقت الذي يستهلكه مشغل لوحة المفاتيح الرقمية للبحث عن المفاتيح.

وقد ظهرت آلات الحساب فى صورتين أساسيتين : آلات الجمع البسيطة وكانت تقتصر على القيام بالطرح والجمع، والآلات الحاسبة والتى تتمكن من القيام ليس بالضرب والقسمة فقط .....



وكانت أول آلة جمع قد اخترعت بواسطة العالم الفرنسى بليه باسكال (١٦٢٣ ـ ١٦٦٢) فى عام ١٦٤٢ وكانت تتمكن من الجمع وحمل الباقى. وفى عام ١٦٧١ قام العالم الألمانى جوتفريد ويلهلم فون ليبنز (١٦٤٦ ـ ١٧١٦) بإنتاج جهاز يتمكن من القيام بعمليات الضرب عن طريق الجمع التكرارى.



وفى عام ١٨٢٢ قام عالم الرياضيات والمخترع الإنجليزى تشارلز باباج (١٧٩٢ ـ ١٨٧١) ببناء آلة جمع صغيرة . وبعد عشرة سنوات قام بتركيز تفكيره فى «آلة الطرح»، والتى اعتبرت بداية الحاسب الرقمى. بعد ذلك تم توظيفه فى مشروع إنشاء الموتور التحليلى» والذى لم يبن أبداً وتوجد الآن صورة منقولة عن جزء منه قد تم بناؤه، فى متحف لندن العلمى.

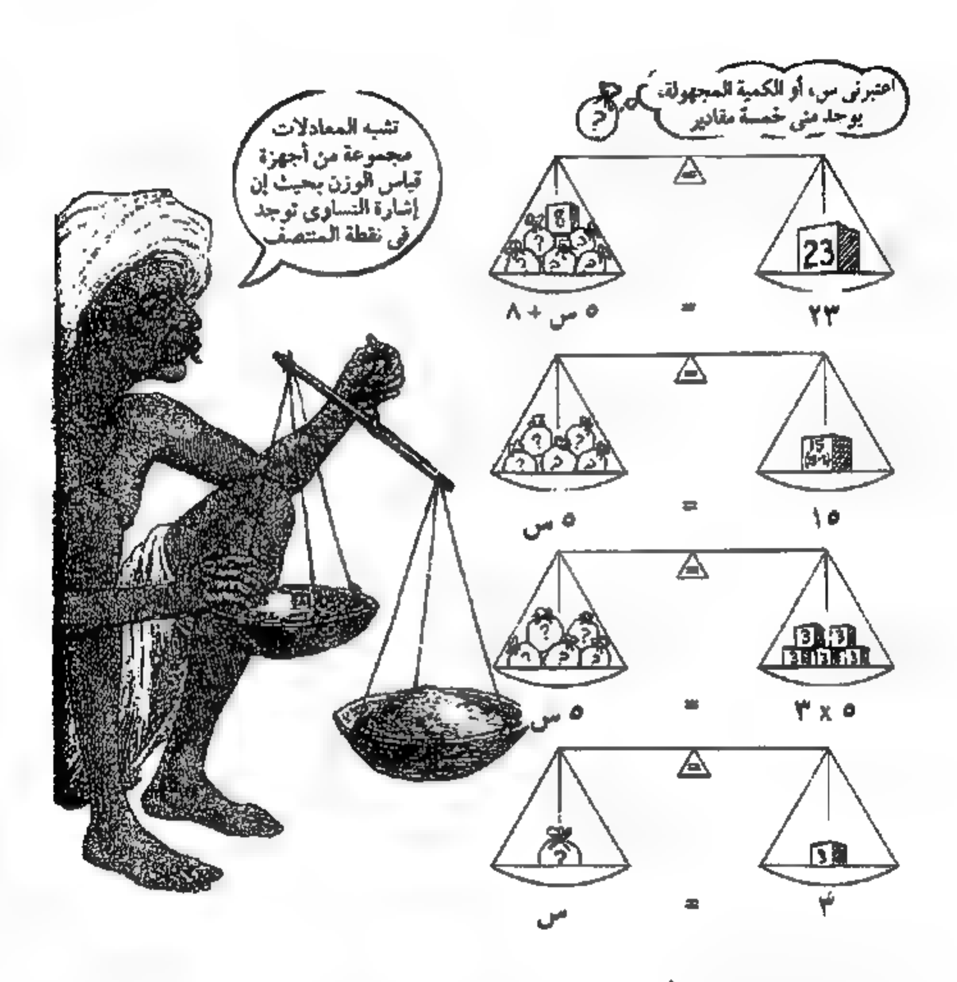
المعادلات

المعادلات هى لب الرياضيات، وهى تستخدم فى كل أفرع الرياضيات البحتة والتطبيقية عدا الرياضيات البدائية جداً. وكذلك تستخدم المعادلات فى العلوم الفيزيائية والحيوية والاجتماعية. وكما هو متضمن فى اسمها ، فالمعادلات تنص على تساوى تعبيرين وغالباً ما تتضمن كميات غير معروفة وتسمى بعضها بالمتغيرات والبعض الآخر بالثوابت أو العوامل. وتستخدم المعادلات كذلك فى تعريف الكميات المختلفة أو النص على العلاقة بين بعض المتغيرات.



وقبل اختراع المعادلات كانت المسائل الرياضية تحل بطرق معقدة بارعة جداً، والآن تم اختصارها إلى صيغة بسيطة جداً.

فى المعادلة ٥ س + ٨ = ٢٣، س هو المجهول المطلوب حسابه ، من الممكن حساب قيمة س بطريقة التجريب والخطأ، أو بطريقة بسيطة (وهى طرح ٨ من كلا الجانبين وبعد ذلك القسمة على ٥).



وهذه المعادلة تتحقق أو تُحل عندما تكون س = ٣ عند ذلك يكون كلا جانبى المعادلة متساويين. وعندما تكون كل قيم المتغيرات تؤدى إلى تحقق المعادلة، تسمى المعادلة فى هذه الحالة بالمتطابقة. على سبيل المثال، المعادلة $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$ تسمى متطابقة لأنها صحيحة لكل القيم الممكنة للمجاهيل. وهذه المتطابقات مفيدة جداً فى المعالجة الجبرية البارعة، حيث تقوم بإبدال التعبيرات المعقدة جداً بأخرى أبسط.


المعادلات الخطية
تحتوى على متغيرات مرفوعة إلى أس واحد ؛ مثل ٥ س + ٨ = ٢٣ وسميت هذه المعادلات كذلك لأنهم عندما يتم رسمهم فى رسومات بيانية يكونون على صورة خط مستقيم
المعادلات التربيعية
تحتوى على متغير واحد مرفوعاً للأس ٢، هذه المعادلات لها دائماً جذران ومن الممكن أن يكونا متساويين. على سبيل المثال : المعادلتان س^{٢} = ٤ و ٢س^{٢}−٣س+٣ = ٥ معادلتان تربيعيتان لهما جذران (٢، −٢) و (٢، $-\frac{١}{٢}$) على الترتيب. أما المعادلة س^{٢} − ٤س +٤ = ٠ فلها جذران متساويان وهما س = ٢
المعادلات التكعيبية
يكون فيها متغير واحد مرفوعاً للأس ٣، وهى لها ثلاثة جذور دائماً بالرغم من أن يكون اثنان منهما أو الثلاثة متساوين. ومن الممكن أيضاً أن يكون أحد الجذور (أو اثنان) عدداً مركباً ولا يمكن أن يكون ثلاثة أعداد مركبة. والمعادلة س٣−٦س٢+١١س−٦ = ٠ معادلة تكعيبية لها جذور س = ١، ٢، ٣

ونسمى المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية معادلات من الدرجة الأولى والثانية والثالثة على الترتيب. والمعادلات حتى الدرجة الرابعة يمكن تمثيل جذورها بصيغة رياضية تتضمن جذوراً تربيعية وبعض الحسابات مثل المعادلة أ $\text{س}^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ صيغة جذورها تكون :

$$\text{س} = \left[\frac{١}{\text{٢أ}}\right]\left[-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{٤أجـ}}\right]$$



لا توجد حدود لدرجات هذه المعادلات الجبرية ولكن هناك حدود فاصلة عند المعادلات الخماسية، فعلى مر العصور كانت هناك محاولات لإيجاد صيغة لجذور تلك المعادلات مثل تلك الصيغة فى صفحة ٥١ ولكن عند بداية القرن ١٩ تبين فى النهاية استحالة وجود مثل هذه الصورة.

والمعادلات من الممكن أن تحتوى على أكثر من متغير فى أحد حدودها، ومثال لذلك المعادلة : س ص – ١ المعادلة الهندسية التى تصف «القطع الزائد».

س

ص

القطع الزائد س ص =١

ودرجة المعادلة يتم تعريفها على أنها مجموع الأسس للمتغيرات المختلفة فى الحد الذى يحتوى على أعلى هذه الأسس ومثال لذلك المعادلة :

أ س^{٥} + ٧ س^{٣} ص^{٣} + جـ س^{٢} ص^{٥} = ٠

أعلى حد فى الأسس هو جـ س^{٢} ص^{٥}





عندما تكون هناك معادلة واحدة تحتوى على متغيرين فهى غير قابلة للحل بالطبيعة، ولكن إذا كان لدينا اثنان من هذه المعادلات، من الممكن أن نقوم بحلهم لإيجاد قيم كلا المتغيرين.

وعندما يكون لدينا مجموعة من معادلتين أو أكثر فى متغيرين أو أكثر فمن الممكن حلهم آنياً بمعالجة بسيطة.

وكمثال لذلك :

١) ٢ س + س ص + ٣ = ٠   س + ٢ س ص = ٠

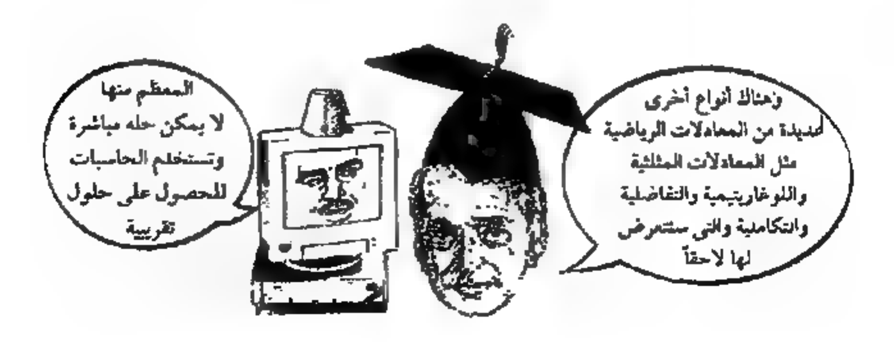
٢) بضرب المعادلة الأولى فى ٢ نحصل على ٤ س + ٢ س ص + ٦ = ٠

٣) وبطرح المعادلة الثانية من هذه المعادلة نحصل على ٣ س + ٦ = ٠

٤) لذلك س = -٢

وبالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الأولى نجد أن ص = $-\frac{١}{٢}$

وهناك بعض المعادلات الآنية الأكثر تعقيداً من ذلك ومن الممكن أن تحل بنفس الطريقة.



القياس



القياسات جزء مهم جداً من الرياضيات، فنحن نقوم بقياس كل شيء تقريباً. وتتنوع القياسات من الوقت والأبعاد والأوزان والسعات والحجوم والكهرباء والحرارة وحتى المسافات التي تفصلنا عن النجوم، وكذلك نقوم بقياس طاقات مكونات النواة والعديد من الأشياء الحميدة مثل الذكاء ومتغيرات البيئة.

اول معيار للقياس كان
عرض راحة اليد

.. والقدم والمسافة من
المرفق إلى طرف إصبع
اليد الأوسط والتي تسمى
بالذرع

وينحدر «النظام الدولي» من النظام المترى الذى وضعه الفرنسيون أثناء فترة التطور الفرنسي. وهذا النظام يمدنا بمجموعة من الوحدات للكميات المشتقة من الكميات الأساسية مثل : المتر (م) للطول ، والثانية (ث) للزمن ، والكليوجرام (كجم) للكتلة.

ومعظم القياسات العملية يتم التعبير عنها في صورة أسس العشرة من الوحدة مثل المليمتر (مم) للطول ، والذى يساوى $١٠^{-٣}$ من المتر.



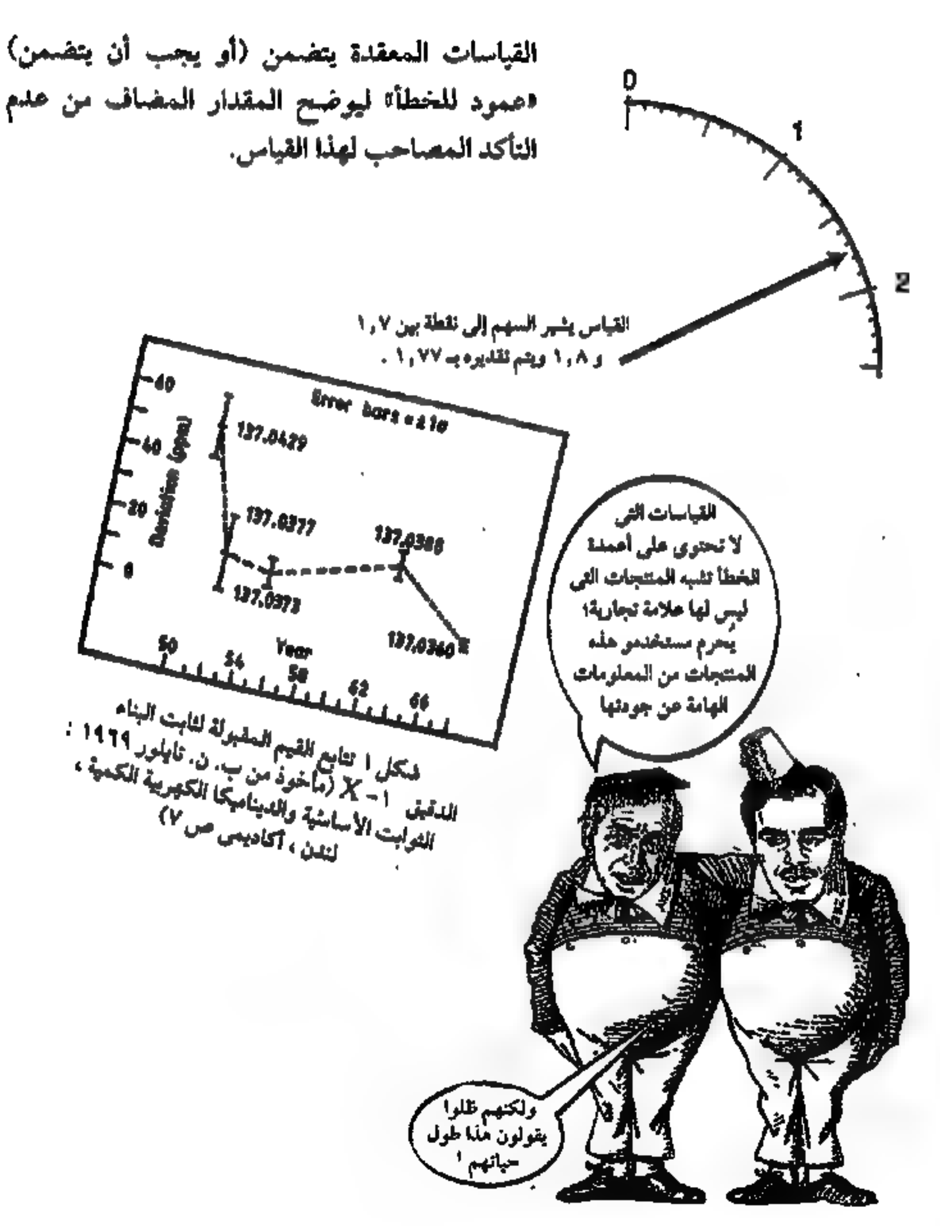
وكل وحدة أساسية لها تعريف وطريقة قياس محددة من قبل الهيئات الدولية الرسمية، وبالطبع تتغير هذه التعريفات كلما ظهرت طرق قياس أفضل.



ولا تزال بعض الدول تستخدم النظام الملكي القديم الذي يحتوى على الرطل والياردة وثمن الجالون

وربع الجالون. ولكن مقياس ثمن الجالون وربع الجالون والجالون الأمريكي يساوي أربعة أخماس نظيره الإنجليزي، لذلك فإن السيارات الأمريكية التي تستهلك وقوداً أكثر بالنسبة لعدد الأميال الأقل الذي تقطعه لكل جالون ...

ويلاحظ أن العد والحساب دائماً ما يتعلقان بأرقام منفصلة ومنفردة ، ولذلك يتضمنون أرقاماً فعلية وعلى النقيض فإن القياسات تهتم بمقادير متصلة . ولا يوجد قياس مثالى يعطى القيمة الفعلية للكمية المقاسة، فعندما تتم مقارنة الشىء الذى نريد قياسه مع معيار معين فإننا نحاول تقريب القراءات بين نقطتين على أدق مقياس. لذلك فإن كل تقرير عن القياسات المعقدة يتضمن (أو يجب أن يتضمن) «عمود للخطأ» ليوضح المقدار المضاف من عدم التأكد المصاحب لهذا القياس.

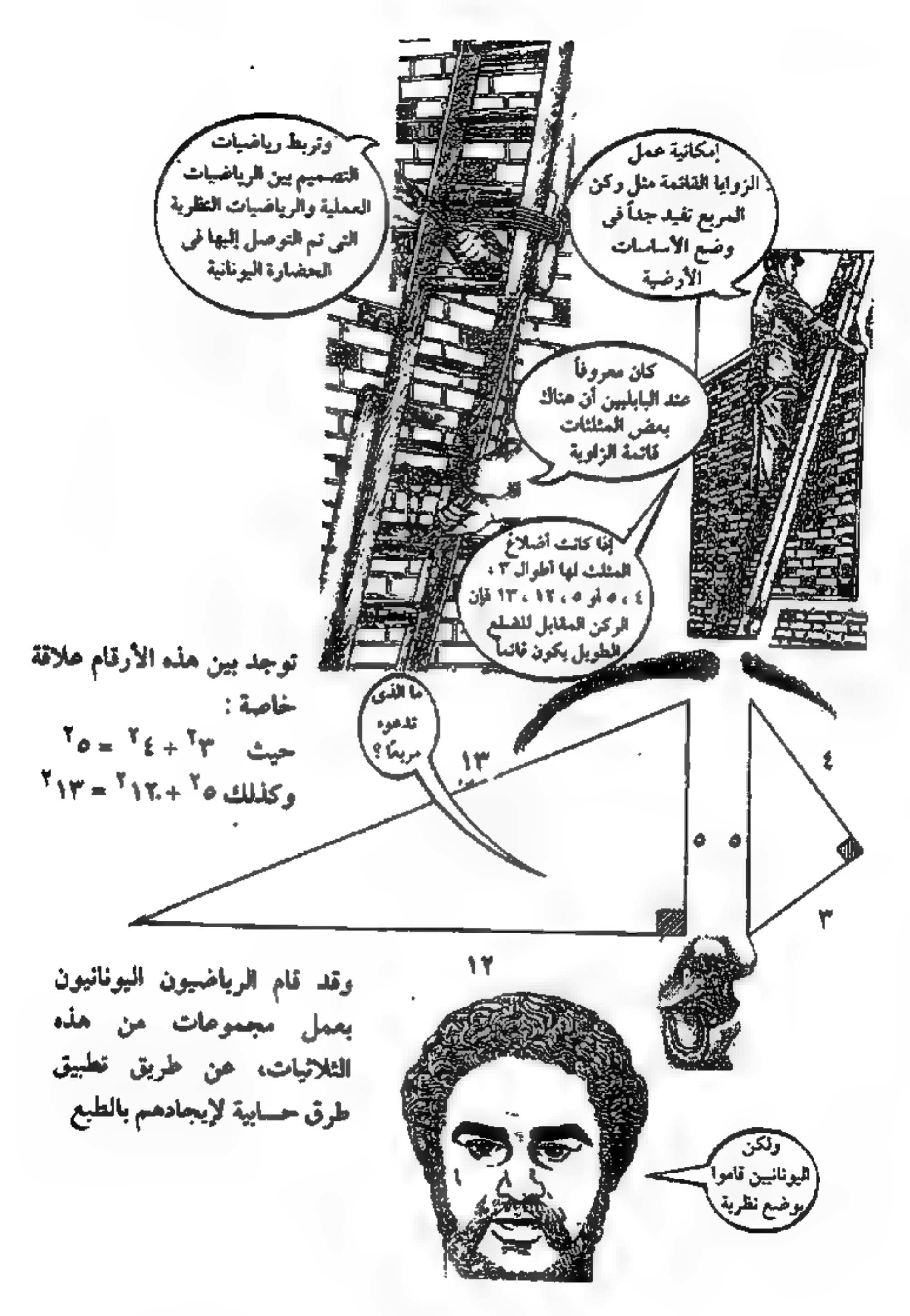


شكل ١ تتابع القيم المقبولة لثابت البناء الدقيق X^{-1} (مأخوذة من ب. ن. تايلور ١٩٦٩ : الثوابت الأساسية والديناميكا الكهربية الكمية ، لندن ، آكاديمى ص ٧)

ومنذ عصور ما قبل التاريخ ظلت القياسات تستخدم في البناء والتصميم. وقد اكتشف علماء العمارة أن الآثار القديمة الباقية مثل Stonehenge كانت تقام بدقة شديدة لملاحظة بعض الأحداث الفلكية، وبالتالي كانت أساساتها تتطلب دقة هندسية في التصميم. وكذلك تم تصميم كنائس أوروبا medival بنسب دقيقة حتى أن نظرية النسب الإلهية كانت هي أساس المعمار والفن في عصور النهضة.

وقد مثلت الأهرام المصرية العظيمة تحدياً أعظم لأجيال من علماء المعمار.




إمكانية عمل الزوايا القائمة مثل ركن المربع تفيد جداً في وضع الأساسات الأرضية
وتربط رياضيات التصميم بين الرياضيات العملية والرياضيات النظرية التي تم التوصل إليها في الحضارة اليونانية
كان معروفاً عند البابليين أن هناك بعض المثلثات قائمة الزاوية
إذا كانت أضلاع المثلث لها أطوال ٣ ، ٤ ، ٥ أو ٥ ، ١٢ ، ١٣ فإن الركن المقابل للضلع الطويل يكون قائماً
توجد بين هذه الأرقام علاقة خاصة :
حيث $٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$
وكذلك $٥^{٢} + ١٢^{٢} = ١٣^{٢}$
ما الذي تدعوه مربعاً ؟
١٣
٤
٥
٥
٣
١٢
وقد قام الرياضيون اليونانيون بعمل مجموعات من هذه الثلاثيات، عن طريق تطبيق طرق حسابية لإيجادهم بالطبع
ولكن اليونانيين قاموا بوضع نظرية

الرياضيات اليونانية

منذ بداية القرن السابع قبل الميلاد قام اليونانيون بفصل استنتاج قوانين الطبيعة عن الأسئلة الدينية المتعلقة بالعلاقة بين الإنسان وآلهته. وقد قيل إن رجل الدولة الرياضي قد قام بجلب علم الرياضيات من مصر إلى اليونان، وهذا الموقف ميز كل العلوم والرياضيات اليونانية القديمة، حيث بحث اليونانيون عن نظريات الطبيعة التي تفسر الأرض والسماء.




فيثاغورث (٥٨٠ ـ ٥٠٠ ق.م)
لم أكن عالم رياضيات فقط ولكنني قائد مدني ومؤسس العبادة الصوفية التي تدعو إلى الزهد والتقشف عن الأنشطة والأطعمة المختلفة
اكتشف فيثاغورث أن النغمات الموسيقية البسيطة تكون بالاندماج من اثنين لهما أطوال متناسبة. يتم اندماج الأوكتاف بواسطة وترين طول أحدهما نصف طول الآخر، أما في حالة الخمس فتكون النسبة ٢:٣.
أدى ذلك إلى أن نؤمن بأن الرياضيات تعكس جمال وألوهية العلاقات حيث تحمل الأرقام الإجابة على أي شيء ولها خاصية سحرية
وقد نسب إلى فيثاغورث نظرية شهيرة تم تسميتها باسمه والتي تنص على: في المثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي طولي الضلعين مساوياً لمربع طول الوتر أي أن أ٢ + ب٢ = حـ٢. وهذه النظرية كانت موجودة قبل فيثاغورث ولكنه هو أول من قام بإثباتها. وبالرغم من أن هذه الرواية لم تعرف إلا بعد وفاته بمئات السنين، إلا أنها تبدو متوافقة مع ما هو معروف عن فيثاغورث، حيث إنه قام بتغيير الرياضيات من كونها مجرد دراسة عملية إلى علم له دلالات فلسفية.



وقد أعجب من ساروا على نهج فيثاغورث بالأشكال الهندسية المنتظمة بكلا نوعيها المضلعات والأجسام الصلبة المنتظمة والتى يوجد منها خمسة أشكال فقط، وقد ذكر فى أسطورة ما أنهم واجهوا أزمة كبيرة عندما اكتشفوا أن بعض العلاقات فى هذه الأشكال لا يمكن التعبير عنها فى صورة نسب للأرقام. وكان أسهل هذه الأزمات هو التحقق من نسبة طول قطر المربع إلى طول ضلعه، والمعروف الآن أن
√٢...
عدد غير نسبى

متناقضات "زينو"

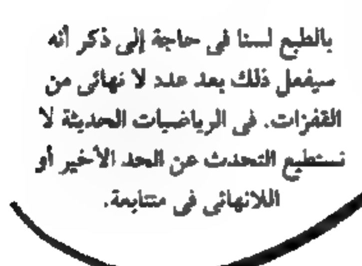
حاول زينو أن يبين أنه سواء تخيلنا أن الفضاء يمكن تقسيمه تقسيماً نهائياً أو لا نهائى أو سواء اعتبرنا الحركة البسيطة أو النسبية سنصل إلى تناقض ، وقد وضح ذلك باستخدام أربعة متناقضات.



وأشهر تلك المتناقضات هى التى تهتم بالتسابق بين أشيلس (أفضل عداء) والسلحفاة. فى قفزة واحدة يستطيع أشيلس أن يقطع نصف المسافة التى تقطعها السلحفاة ويكرر ذلك مرات عديدة ...



باستخدام هذا التحليل كيف يمكننا تفسير تغلبه على السلحفاة ؟



وهذا التناقض يوضح أننا إذا جعلنا الفضاء مقسماً تقسيماً لا نهائى، سنصل إلى تناقضات فى وصف الحركة.

هناك أربعة متناقضات أخرى لزينو عن الحركة وأخرى عن التغيير بوجه عام، وإليك المثال التالى. بفرض أننا أعطينا الأوامر التالية ...



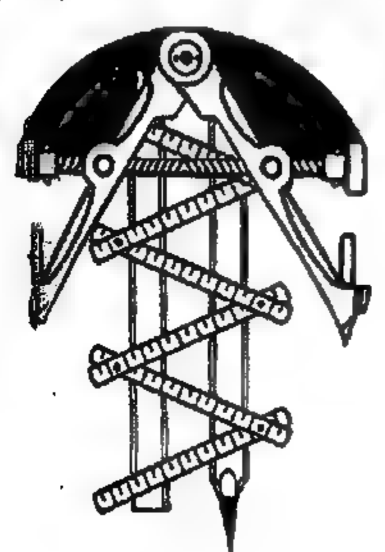
وقد قام الفلاسفة بملاحقة زينو فى كل لحظات حياته ولكن مثل أشيلس لم يتمكنوا من اللحاق بفريستهم تماماً. ربما كان لدى زينو شىء يريد أن يخبرنا به عن علم الرياضيات، فنحن نحب أن يكون هذا العلم واضحاً ولكنه فى الحقيقة متناقض.

إقليدس

(٣٢٣ – ٢٨٥ ق . م.)



كانت لأفكار إقليدس تأثيرات ضخمة على علم الرياضيات فى الغرب حيث إنها تعتبر الأساس للهندسة. وقد قام بتنظيم إثباتات تقليدية مبنية على بعض «الأعمال» باستخدام بعض الأدوات المثالية مثل المسطرة والفرجار (لعمل أقواس من دوائر). باستخدام هذه الأعمال يمكنك إثبات أشياء عن هيئة الأشكال دون استخدام الأمثلة الرقمية، وكان هذا هو التغيير الكبير فى الرياضيات اليونانية ـ فكرة الإثبات العامة المختصرة.



وفى عمله «العناصر» قدم إقليدس أساسياته المشهورة للهندسة وقام بتعريف الأعمال المسموح بها فى الإثبات (وهناك بعض الأعمال الأكثر تعقيداً والتى كانت معروفة بتحويل بعض الإثباتات الصعبة إلى صورة سهلة ولكنها لم تكن تعتبر «هندسية»). وبعد تعريف عناصره الأساسية مثل «النقطة» و«الخط» قدم إقليدس خمس ملاحظات شائعة عن الكمية وكذلك خمسة افتراضات للأعمال.

الملاحظات الشائعة :

١- إذا ساوى شيئان شيئاً ثالثاً فإن الثلاثة يكونون متساوين

أ = جـ ، ب = جـ ، أ = ب

٢- إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات متساوية كان الناتج متساوياً = + = = =

٣- إذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية كان الناتج متساوياً = - = = =

٤- الأشياء المتطابقة تكون متساوية

٥- الكل أكبر من الجزء الكل

الافتراضات :

من المسلم به أنه في المستوى :

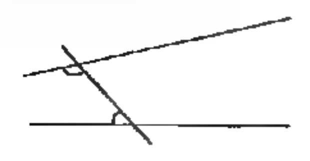
١- يمكن رسم الخط بين أي نقطتين.

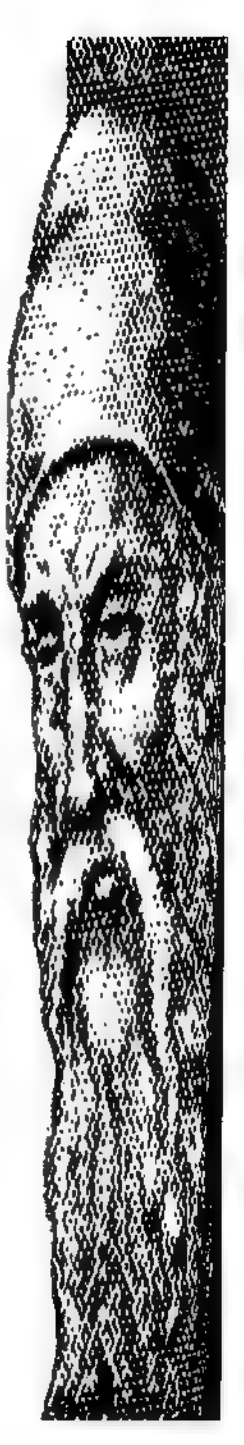
٢- يمكن مد أي خط من كلا الجانبين بدون حد.

٣- يمكن رسم دائرة بأي نصف قطر حول أي مركز .

٤- كل الزوايا القائمة متساوية.

٥- الخطان اللذان يقطعان خطاً ثالثاً بحيث كان مجموع الزوايا الداخلة أقل من زاويتين قائمتين يجب أن يتقاطعا في نقطة . وأول ثلاث نقاط تعرف أصالاً أما الاثنان الباقيان فهما نظريات. الافتراض الخامس يسمى «افتراض التوازي» وقد ظل هذا الافتراض تحدياً للرياضيين من بعد إقليدس. وفي الواقع فإن هذا الافتراض يعتبر المفتاح الذي يصف نوعين مختلفين من الهندسة.









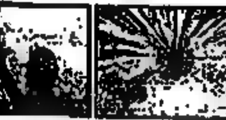


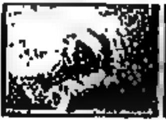


وباستخدام هذه الأساسات اتجه إقليدس لإثبات كل النتائج الهندسية في عصره وحتى نظرية فيثاغورث. وبغض النظر عن صعوبة مسلماته (والتي اعتبرت فيما بعد أنها حقائق ذاتية الإثبات، وكذلك الاستنتاجات الناتجة عنها تم التعامل معها على أنها حقائق أيضاً). وقد تم التعامل مع الهندسة على أنها مثال عظيم للمعرفة الحقيقية التي يمكن الوصول إليها بالعقلانية الإنسانية وحدها.

وجاء بعد إقليدس رياضي عظيم جداً وهو أرشيميدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق.م.). وضع أرشيميدس طرقاً لقياس مساحة الأشكال الدائرية وكذلك مساحة سطح الأجسام المنحنية مثل الكرة والأسطوانة، وقد استنتج قيمة تقريبية لـ ط ...



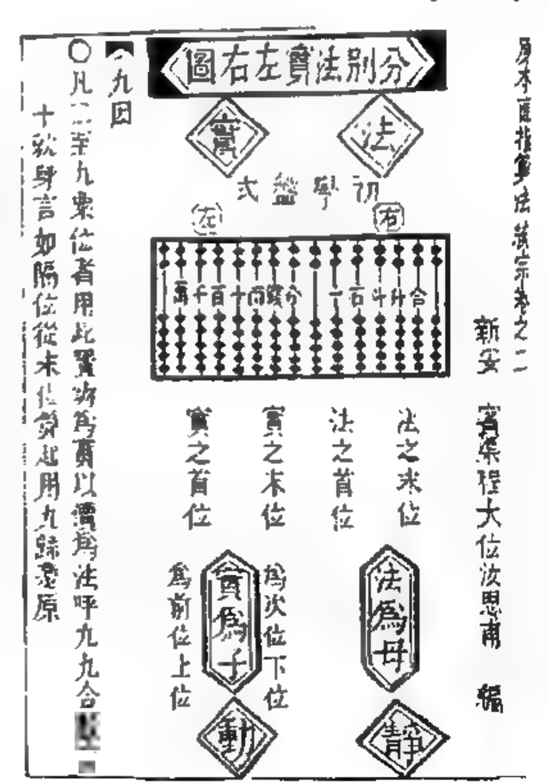





الرياضيات الصينية

لم يَقُم الصينيون باستخدام الإثباتات الثابتة التى وجدناها فى «عناصر إقليدس» وذلك لأنهم لم يُعجبوا بالمنطق الثابت. كان الصينيون، مهتمين بالتطبيقات العملية للأفكار ولم يدرسوا الرياضيات من أجل الرياضيات. وبالطبع لم يمنعهم ذلك من وضع إثبات للمثلث القائم الزاوية والذى كان مختلفاً تماماً عن نظرية فيثاغورث. وعلى عكس اليونانيين لم ينزعج الصينيون من الأرقام الصماء (وهى تلك الأرقام التى لا يمكن التعبير عنها على صورة نسبة بين رقمين صحيحين أو الأرقام غير النسبية).

ولتمييز الأرقام السالبة ـ على سبيل المثال ـ استخدم الصينيون سيقاناً حمراء بدلاً من اللون الأسود !

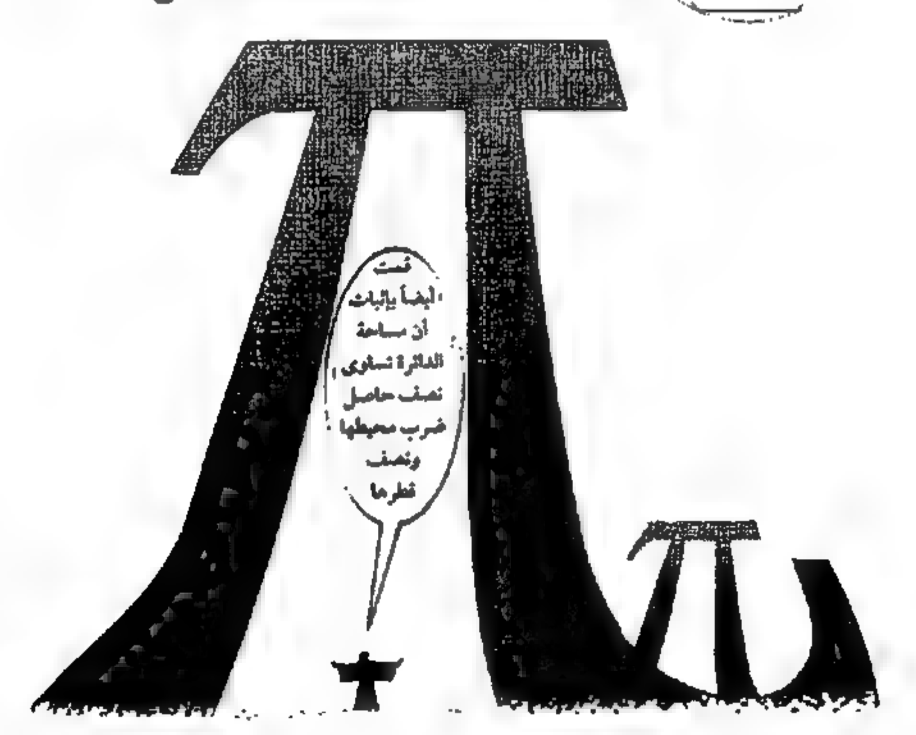


وقد قام الصينيون بالتدريب على الجبر دون استخدام رموز بكتابة كل أفكارهم فى صورة كلمات. وقد استخدموا لوحة للعد فى الجبر وكذلك فى كل الاكتشافات الرياضية الأخرى. وقد طور الصينيون عن طريق العالم صنج ديناستى (٩٦٠ ـ ١٢٧٩) بعض الملحوظات للتعامل مع المعادلات حتى الأس التاسع. وقد استطاع الصينيون حل المعادلات الآنية الخطية (فى مجهولين أو أكثر) وكذلك المعادلات التربيعية.

وقد اهتم الصينيون أيضاً بالمربعات السحرية التى يتم ملء خاناتها بأرقام عندما تجمع تعطى نفس الرقم، ويطبق هذا على الصفوف الرأسية والأفقية والقطرية أيضاً . واخترع الصينيون مكعبات ثلاثية الأبعاد لها نفس الخاصية. وظل الصينيون متشوقين للبحث عن قيمة دقيقة لـ «ط». وقد استنتج «ليو هوى» (وهو أحد علماء الرياضيات القدماء فى الصين) قيمة لـ «ط»

4	9	2
3	5	7
8	1	6

حتى أربع علامات عشرية. وبنى ليو هوى طريقته على «طريقة الاستنزاف» حيث من الممكن وضع مضلع داخل الدائرة وعن طريق زيادة عدد أضلاعه حتى تصل أطوالها إلى حد من القصر يمكننا معه مساواة المضلع بالدائرة.



وفى القرن الخامس بعد الميلاد قام الفريق المكون من الأب والابن تسو تشونج تشيه وتسو كنج تشيه بالحصول على قيمة لـ ط تساوى ٣,١٤١٥٩٢٦ و ٣,١٤١٥٩٢٧ . لم يتم التوصل لهذا الرقم فى العالم الغربى حتى القرن السابع عشر.

تشيو تشانج

هو أشهر كتاب فى الرياضيات الصينية. ولا نعرف من كتبه ولا متى تمت كتابته بالتحديد ولكنه يفترض أنه يعود إلى آخر سلالة «تشين» أو بداية سلالة «هان» (القرن الأول بعد الميلاد).

وهذا الكتاب يغطى الموضوعات التالية :

- مراجعة أساسية (مع قواعد الجمع والطرح للكسور) والنسب (النسب المئوية).
- التوزيع النسبى (المتواليات الهندسية والحسابية بالإضافة إلى قاعدة الثلاثة).
- قياسات أولية (إيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية بطرق هندسية).
- دليل المهندسين (حجوم الأجسام ثلاثية الأبعاد).
- ... ...

هذا بالإضافة إلى أجزاء أخرى عن الضرائب وبعض الألغاز وطرق الجدولة.



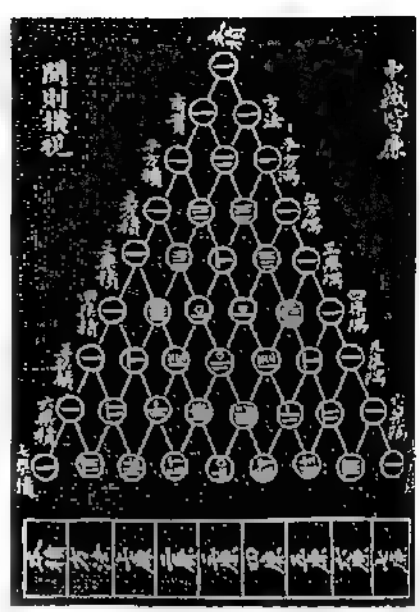
أربعة علماء رياضيات صينيون

يعتبر آخر القرن الثالث عشر وبداية القرن الرابع عشر هى فترة أقصى ازدهار للرياضيات الصينية. وقد عاش خلال هذه الفترة أربعة من أشهر علماء الرياضيات فى الصين.



وكان هناك أكثر من ثلاثين مدرسة رياضيات عبر الصين وكانت الرياضيات مادة إلزامية فى اختبارات الخدمة الوطنية العامة.

ويعتبر العالم تشين تشيو شاو واحداً من أعظم علماء الرياضيات الصينيين على الإطلاق وقد عمل فى الخدمة العسكرية والمدنية وكان كتابه تسعة قطاعات من الرياضيات يتضمن بعض الأفكار الجديدة وقدم تحليلاً غير معروف من قبل (وهو دراسة المسائل التى لها حلول على هيئة أرقام صحيحة).



وقد درس كُلٌّ من «يانج هوى» و «تشو شيه تشيه» التباديل والتوافيق بين التعبيرات وتوصلوا إلى ما نسميه الآن بنظرية ذات الحدين. وتتضمن هذه النظرية ضرب مقدارين مكونين من حدين مثل (س + ١) و(س + ٣) والذى يعطى ناتجاً س٢ + ٤ س + ٣ = ٠

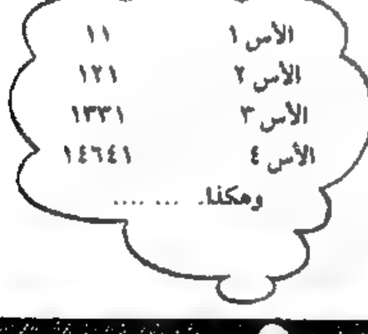
وكلما ازداد عدد المقادير المضروبة ببعضهما ازداد عدد الحدود فى الحل النهائى مثل :

(س + ١)^{٣} = (س + ١) (س + ١) (س + ١)

= س٣ + ٣س٢ + ٣ س + ١ ٠

وقد قاد هذا عالمى الرياضيات للعمل فى ما نعرفه الآن بمثلث باسكال. فقد اكتشفا أنه إذا

لاحظ أحدنا الأرقام المصاحبة للسينات يظهر نموذج معين. بالنسبة للأس الأول (مثل (س+١)) هذه الأرقام هى ١ ، ١ ؛ وبالنسبة للأس ٢ (مثل (س+١)^{٢}) تكون الأرقام ١، ٢، ١؛ وبالنسبة للأس ٣ (مثل (س + ١)^{٣}) تكون الأرقام ١، ٣، ٣، ١ وهكذا. وقد تم تخطيط هذه الأرقام فى نفس الصورة التى صممها باسكال فى القرن السابع عشر.





باسكال

وقد استُخدم مثلث باسكال في حساب الاحتمالات. على سبيل المثال يعطي النصف الثاني التباديل المختلفة عند رمي قطعتي نقود. فهناك احتمال واحد أن تظهر صورتان واحتمالان أن تظهر صورة وكتابة ، واحتمال واحد لظهور كتابتين.



وقد تم توضيح ذلك بواسطة عالم الرياضيات تشيا هسين (١١٠٠ ميلادية) وربما تكون ظهرت قبل ذلك.



تعتمد الرياضيات الهندية (شأنها شأن الرياضيات الصينية) على كل الإثباتات المتنوعة متضمنة التحققات المرئية والتى لم يتم إرجاعها إلى أى نظام استدلالى تقليدى. وقد تطورت الرياضيات الهندية من النظام الذى طوره علماء المنطق وعلماء اللغة الهنديون. وقد تطورت الرياضيات فى الهند فى أربع مراحل واضحة.

مرحلة (الهارابان) من ٢٥٠٠ ق.م. إلى ١٠٠٠ ق.م. وتضمنت الرياضيات الأولية باستخدام الأحجار، إلخ.

وتلى هذه المرحلة فترة «فيديك» والتى استمرت لمدة ١٠٠٠ عام والتى اهتمت بهندسة الطقس. وخلال هذه الفترة بدأت «الجنسنية» و«البوذية» فى الظهور.

ثم تلى ذلك الفترة التقليدية والتى استمرت تقريباً حتى عام ١٠٠٠ ب.م. وقد اهتم الرياضيون فى هذه الفترة بتطوير المبادئ القديمة مثل الأرقام والخوارزميات والجبر.



قصيدة من أعمال عالم الرياضيات الهندى باسكارا (انظر الصفحة المقابلة)

والمرحلة الأخيرة فى الرياضيات الهندية هى فترة القرون الوسطى «لمدرسة كيرالا» والتى انتهت فى القرن السادس عشر حيث تم تطوير أفكار أكثر ذكاءً، وسبب انتهاء هذه المدرسة فى كيرالا غير معروف تماماً. وعلى أية حال فقد أثرت مدرسة كيرالا كثيراً فى الرياضيات الأوروبية حيث إن الاكتشافات الرياضية فى أوروبا كانت معروفة مسبقاً لدى علماء الرياضيات فى كيرالا قبل ذلك بحوالى ثلاثة قرون.

هندسة الفيدا[١]

كان هندوس فيديك معجبين جداً بالأرقام الكبيرة التي كانت تشكل جزءاً من المسئولية الدينية لديهم. فعلى سبيل المثال عند مناقشة أمر مثل القربان كانت تذكر أرقام مثل ١٠٠٠٠٠٠ مليون. وكان هناك اعتقاد كبير بالأرقام التي تزداد على صورة مضاعفات العشرة، وكلما ازداد الرقم أصبح أكثر إثارة.

وهندسة مذبح الكنيسة تعطينا تصوراً للجبر عند هندوس فيديك. فطبقاً لأحد الأنظمة كان مذبح الكنيسة يأخذ شكل شبه منحرف ذي ضلعين متساويين . ويتم زيادة أو إنقاص أطوال الأضلاع بالتناسب مع الطقوس المختلفة. وهناك طقوس مختلفة تتطلب عدم تغير أطوال أضلاع معينة بينما تزداد أو تنقص أطوال أضلاع أخرى.

وقد مكن هذا القادة الدينيين من المسائل الرياضية التي تتطلب حلولاً جبرية. وقد تم وضع قواعد لهذه العمليات والأسئلة التي تأخذ في اعتبارها عدد الأحجار المستخدمة في هذه التغيرات. وتقدير عدد الأحجار المستخدمة في هذه العملية بحيث لا تتقابل الصدوع في الطبقات المتتالية أدى إلى استخدام المعادلات الآتية.



---

(١) الفيدا: هي مجموعة الكتب المقدسة في الديانة الهندوسية، وكلمة الفيدا سنسكريتية تعني «المعرفة»، ولم يبق منها سوى أربعة أسفار. (المراجع).

وقد حسب الرياضيون الهنود قيمة ط لأقرب أربع علامات عشرية.

الطريقة الهندية المعتادة لإيجاد مساحة الدائرة أو حجم الكرة ...



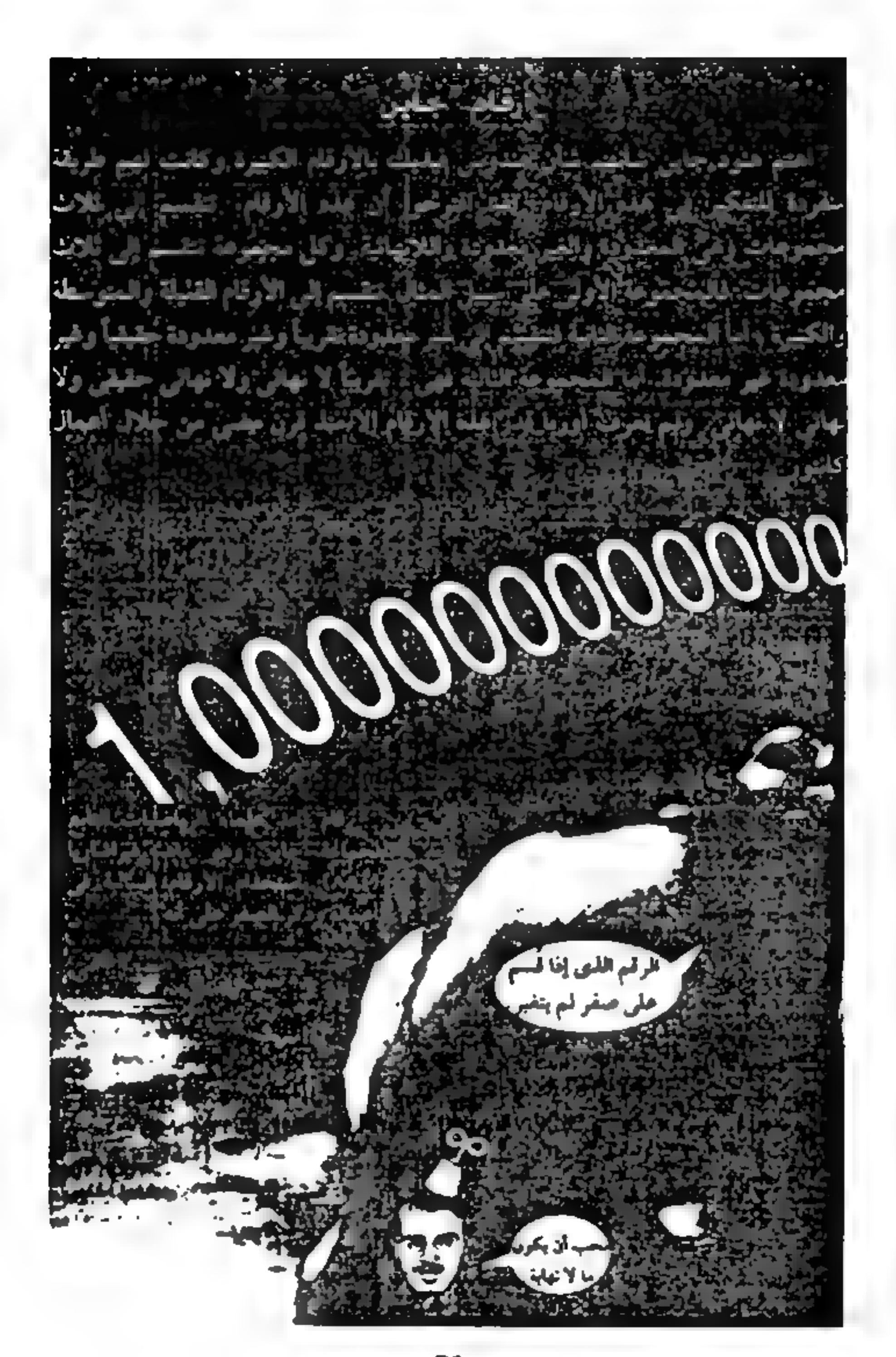
يتم تقسيم الكرة ـ على سبيل المثال ـ إلى الكثير من الأهرام الصغيرة بهدف جمع أحجامهم بنفس «طريقة الاستنزاف» التي استخدمها أرشيميدس وقد احتوت هذه الطريقة على مبادئ العلم الذى عُرف فيما بعد باسم «التكامل» وقد استخدم الهنود هذه الطريقة فى الفلك من أجل حساب سرعة ومواقع الكواكب. وعلى سبيل المثال كان للتنبؤ بالكسوف شأن دينى عظيم. حيث يكتسب عالم الفلك الذى يستطيع التنبؤ بذلك بدقة احتراماً عظيماً. ويعتقد بعض علماء تاريخ الرياضيات الهندية أن هذا هو البداية الحقيقية لعلم «التفاضل والتكامل».

براهما جوبتا

وظهر الجبر فى فترة براهما جوبتا (٥٩٨) (وهو أحد أعظم علماء الرياضيات فى الهند) على أنه فرع منفصل من الرياضيات. وقد كتب براهما جوبتا أبحاثاً غطى فيها بعض النقاط مثل الجذور التربيعية والتكعيبية والكسور وقاعدة الثلاثة والخمسة والسبعة وغيرها والمقايضة. وخلال هذه الفترة تم تقسيم المعادلات إلى أنواع ما زالت تعرف حتى الآن : البسيطة Yavat-tavat والتربيعية varga والتكعيبية ghana والتربيعية الثنائية varga - varga . وقد اهتم براهما جوبتا بالمعادلات الخطية ذات المجاهيل وكذلك المعادلات التربيعية. وكان لبراهما جوبتا العديد من المعلقين الذى نقلوا أفكاره عبر السنين.



ومثل باقى العلماء الهنود فقد أحب براهما جوبتا الأرقام غير النسبية مثل $\sqrt{2}$ وحدد قيمتها لدرجة عالية جداً من التقريب.



1,000000000000
الرقم اللى إذا قسم
على صفر لم يتغير
يجب أن يكون
ما لا نهاية

اندماجات فيديك وجاين

كان كل من فيديك وجاين الهنود مغرماً بالتعامل مع الاندماجات. وأحد مصادر هذا الاهتمام كان قصائد فيديك الشعرية وتغيراتها. وكان بعض هذه الأبيات مكوناً من ٦ مقاطع وبعضها من ٨ أو ٩ أو ١١ أو ١٢، وكان التحدى هو تغيير الأصوات الطويلة والقصيرة فى كل مجموعة مقاطع وإيجاد الاندماجات المختلفة المتاحة. وقد أدى هذا البحث إلى العديد من مسائل التباديل. على سبيل المثال: الروائح التى تنتج من خلط ١٢ مادة فى صورة منفردة أو ثنائيات أو ثلاثيات فى نفس الوقت.



وقد استخدم باسكارا الثانى (١١١٤) الصفر فى عملياته الحسابية والجبرية. وفى الجبر استخدم نظرية الإشارات والحروف ليشير إلى الكميات المجهولة. وقد درس مسائل معقدة جداً فى نظرية الأرقام وقد كان لأعماله الفضل فى أصل علم التفاضل والتكامل الحديث.

الشعر الرياضى

ثم تناقل الأفكار الرياضية الهندية فى صورة الشعر. ويشيع وجود الألغاز الرياضية فى الشعر حتى الآن، وأحد الألغاز الرياضية الشعرية هو :




الإجابة هى ٢٨ . وإذا أراد أحد
أن يحصل عليها فعليه أن يقوم بها بطريقة
عكسية لما هو مذكور فى اللغز لذلك
نقوم بالترتيب × ١٠ ، -٨ ،
( )٢، + ٥٢، إلخ
ها هى طريقة الحل : [(٢) (١٠) – ٨]٢ + ٥٢ =
١٩٦
بعد ذلك
ثم (١٤) (٣/ ٢) (٧) (٤/ ٧) = ٢٨ الإجابة
٣
وفى هذه الأيام نعبر عن الإجابة بـ س ونكتب
(√(٣س × ٤/٧ × ٢/٣)٢ – ٥٢ + ٨) \٣ = ٢
وبدون خلط فإن هذا التعبير المعقد يكافئ تماماً
التعبير القديم وللحصول على حل نجعل س
نصب أعيننا ونحاول أن نجعلها فى طرف وحدها
لنحصل على قيمة لها فى الطرف الآخر.

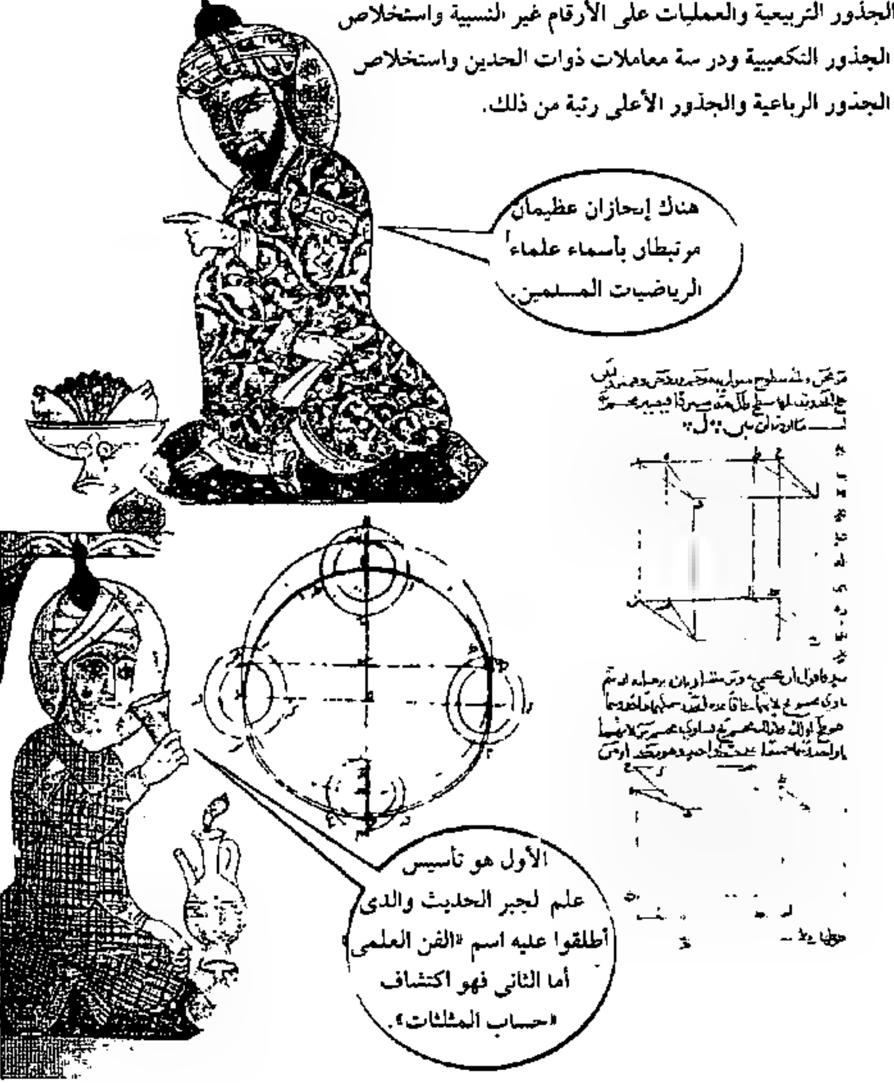
راما نوجان

يحتوى التاريخ الهندى على العديد من الرياضيين البديهيين فعلى سبيل المثال كان «سرينيفازا راما نوجان» (١٨٨٧ - ١٩٢٠) فاشلاً أكاديمياً ولكنه كان عالم رياضيات لامعاً. وقد اعتمد راما نوجان على المذهب التصوفي والميتافيزيقا وكذلك الأفكار التجريدية في دراسة الرياضيات . وكانت طريقة الوصول إلى النتائج العميقة الذكية (وبالمناسبة الخطأ) خارج نطاق فهم أى أحد وكان نصيره فى انجلترا عالم الرياضيات ج.هـ. هاردى والذى زاره ذات مرة بينما كان مريضاً فى أحد المستشفيات.



الرياضيات الإسلامية

قام المسلمون بتوحيد الفكر الرياضى فى كل الحضارات السابقة لهم ، حيث قاموا بدمج الجبر والعلاقات الحسابية البابلية والهندية والصينية بالعلاقات الهندسية اليونانية والإغريقية. وكنتيجة لذلك كان علماء الرياضيات المسلمون على درجة عالية من الجرأة فى التعامل مع العمليات الحسابية على الأرقام الصحيحة والكسور وكذلك استخدام وتحويل الأرقام العشرية والسداسية وأيضاً استخلاص الجذور التربيعية والعمليات على الأرقام غير النسبية واستخلاص الجذور التكعيبية ودر سة معاملات ذوات الحدين واستخلاص الجذور الرباعية والجذور الأعلى رتبة من ذلك.

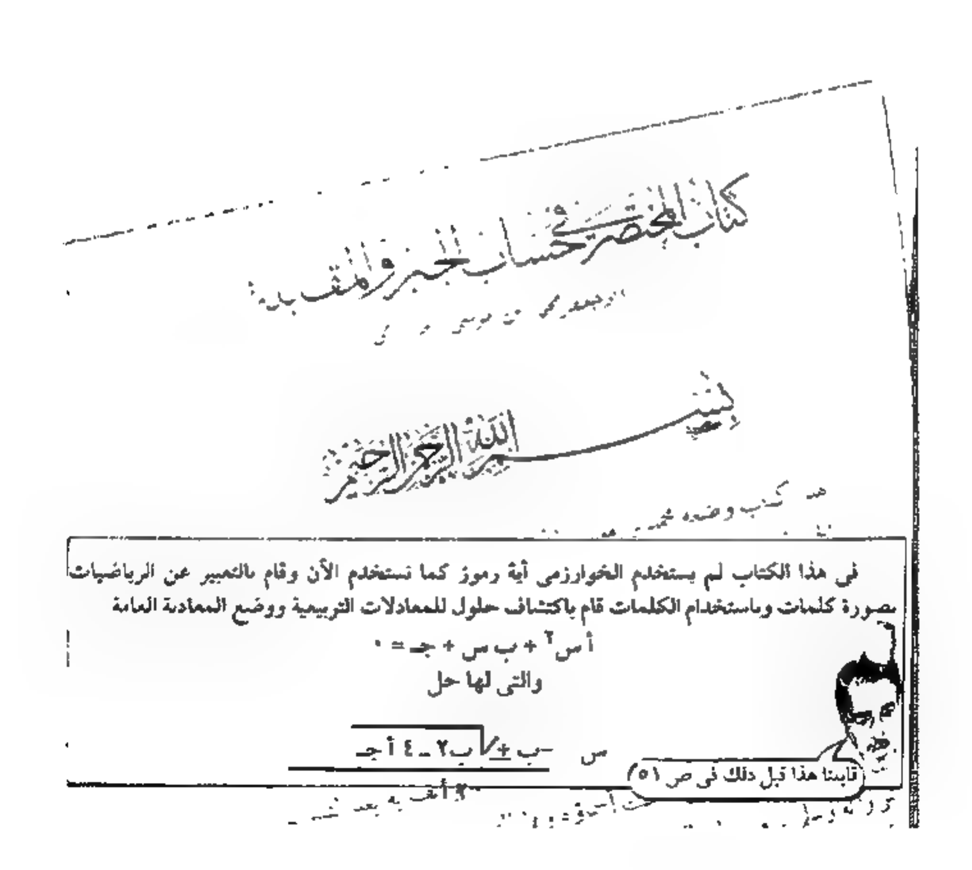


الخوارزمي

محمد بن موسى الخوارزمي (توفى عام ٨٤٧) هو مؤسس علم الجبر الذى نعرفه فى أيامنا الآن. وقد أتت كلمة الجبر من عنوان كتابه «كتاب المختصر فى حساب الجبر والمقابلة» وتشتق كلمة خوارزم من اسمه. وقد وضح الخوارزمى كيفية اختصار أى مسألة إلى واحدة من ست صيغ قياسية باستخدام عمليتين الأولى تعرف بالجبر والثانية هي المقابلة.

وتهتم الطريقة الأولى (الجبر) بنقل الحدود لحذف الكميات السالبة (مثل س = ٤٠ - ٤ س تصبح ٥ س = ٤٠).

والمقابلة هى العملية التالية وهى عبارة عن موازنة الكميات الموجبة المتبقية (لذلك إذا كان لدينا ٥٠ + س٢ = ٢٩ + ١٠ س تقوم المقابلة باختصارها إلى س ٢ + ٢١ = ١٠ س).



تطوير الجبر



نحن نعرف أن الجبر له هدف مزدوج، الأول هو التطبيق التقليدى للعمليات الحسابية الأولية بصورة تعبيرات جبرية، والثانى هو دراسة التعبيرات الجبرية بغض النظر عما تمثله وذلك لكى نكون قادرين على تطبيق العمليات العامة المطبقة على الأرقام على تلك التعبيرات.

الصموعل (المتوفى عام ١١٧٥)
كان الصموعل هو أول من كتب النتائج الجبرية فى صورة رمزية.


فى كتابى الفخرى قمت بدراسة «أسس المجاهيل» المختلفة
وكذلك قمت بتطبيق عمليات حسابية على التعبيرات الجبرية وأنتجت أول جملة فى جبر «كثيرات الحدود»
الكراجي (توفى عام ١٠٠٠)
تم استخدام أعمال الكراجي بواسطة من تبعه لإيجاد قواعد قسمة كثيرات الحدود واحدة على الأخرى وكذلك قواعد إمكانية إيجاد الجذور التربيعية لكثيرات الحدود.
ونتج عن ذلك «التحليل الاندماجي» والذى تم تطبيقه بعد ذلك فى تحليل وحساب احتمالات ترتيب الأوراق وأحجار النرد.
تم أيضاً استنتاج معادلة لمفكوك ذات الحدين.
وتم عرض جدول لمعاملاتها وهو مثلث باسكال الذى كان قد اكتشف بواسطة علماء الرياضيات الصينيين.

وقد قام عمر الخيام (المتوفى عام ١١٢٣) بمناقشة إيجاد الجذور من الدرجات الرابعة والخامسة والسادسة والأعلى من ذلك بطريقة اكتشفها والتى لا تتضمن استخدام الهندسة ولكنها مكافئة لمثلث باسكال. وكان اكتشافه هذا معاصراً للاكتشاف المشابه فى الصين.



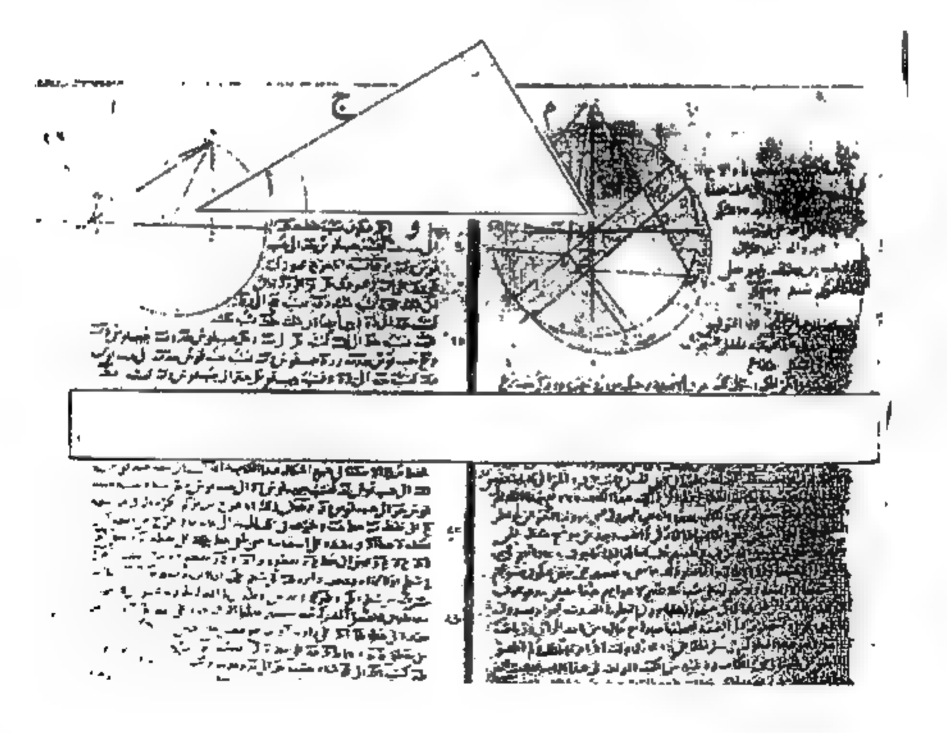
اكتشاف حساب المثلثات

قدم علماء الرياضيات المسلمون النسب المثلثية الستة الأساسية واستخدامهم في حل مسائل حساب المثلثات

وقد حل حساب المثلثات الحديث محل الطريقة غير البارعة لاستخدام الأوتار (المبنية على قطاعات من الدائرة) التي استخدمت بواسطة عالم الفلك اليوناني العظيم Ptolemy (١٠٠ ـ ١٧٠) ويتم تعريف هذه الدوال بواسطة أضلاع المثلث القائم الزاوية، والمسمون بـ "م" للضلع المقابل لزاوية ما و "ج" للضلع المجاور لها و "و" للوتر، وهذه الدوال هي جا = $\frac{م}{و}$، جتا = $\frac{ج}{و}$، وظا = $\frac{م}{ج}$ وقد نتج منه هذه التعريفات البسيطة عالم غير مصدق من العلامات. وقد كان حساب المثلثات عبارة عن أعظم تطور هام للرياضيات والفلك والعلوم العملية مثل مساحة الأراضي وبناء الحصون.

والدوال الثلاثة الأخرى هي عبارة عن مقلوب الدوال الأولى وهي :

$$قتا\ أ = \frac{١}{جا\ أ} = \frac{و}{م} ،\quad قا\ أ = \frac{١}{جتا\ أ} = \frac{و}{ج} ،\quad ظتا\ أ = \frac{١}{ظا\ أ} = \frac{ج}{م}$$



البطانى

قام البطانى (المتوفى عام ٩٢٩) بإنتاج عدد من العلاقات المثلثية والتى تتضمن :

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$$

$$\text{قا أ} = \sqrt{\text{١ + ظا}^{\text{٢}}\text{ أ}}$$

وقام كذلك بحل المعادلة جا س = أ جتا س مكتشفاً بذلك المعادلة

$$\text{جا س} = \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{١ + أ}^{\text{٢}}}}$$



أبو وفا



استنتج أبو وفا (المتوفى عام ٩٩٨) العلاقات التالية :

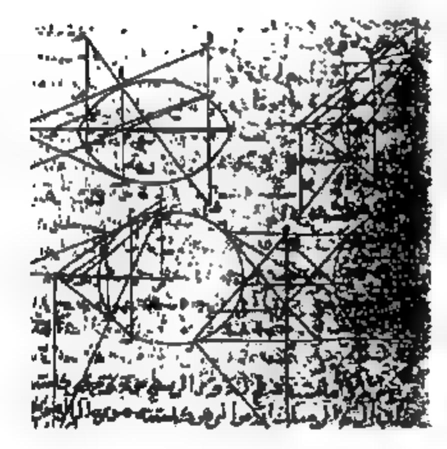
جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

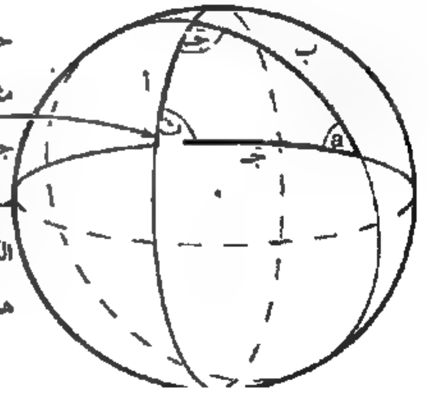
جتا ٢ أ = ١ - ٢ جا٢ أ

جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ

وكذلك اكتشف صيغة الجيوب للهندسة الكروية

جا أ / جا أ̂ = جا ب / جا ب̂ = جا جـ / جا جـ̂





حيث أ، ب، جـ هي أطوال أجزاء الدوائر التي تكون مثلثاً على سطح الكرة مقدرة بالدرجات. أما أ̂ ، ب̂ ، جـ̂ فهي الزوايا المقابلة لها. ويتم عمل الدوائر على سطح الكرة بواسطة المستويات التي تمر بمركز تلك الكرة. (في هذه الأيام تتبع الطائرة العابرة للقارات هذه الدوائر حيث إنها تعتبر أقصر مسافة بين نقطتين).

ابن يونس وثابت بن قرة

قام ابن يونس المتوفى عام ١٠٠٩ بتحقيق الصيغة التالية :

$$\text{جتا أ جتا ب} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\,(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتا}\,(\text{أ} - \text{ب})\right)$$

وبالرغم من أنها مبنية أساساً على علم المثلثات إلا أنها مكنتنا من تحديد قيمة لحاصل الضرب على صورة مجموع. وفي الوقت الذي كانت فيه عملية ضرب رقمين مكونين من عدد كبير من الخانات تعتبر عملية مملة كانت هذه المعادلة موفرة للجهد بطريقة كبيرة ، بعد ذلك أعطت هذه الصيغة بوادر نشأة اللوغاريتمات والتي قامت بنفس المهمة بصورة مباشرة، أيضاً أدت هذه الصيغة إلى الصيغة الأساسية لحساب المثلثات الدائرية المستخدم في هذه الأيام من خلال معادلة جيب التمام.

$$\text{جتا}\,\hat{\text{أ}} = \text{جتا}\,\hat{\text{ب}}\;\text{جتا}\,\hat{\text{جـ}} + \text{جا}\,\hat{\text{ب}}\;\text{جا}\,\hat{\text{جـ}}\;\text{جتا}\,\hat{\text{أ}}$$

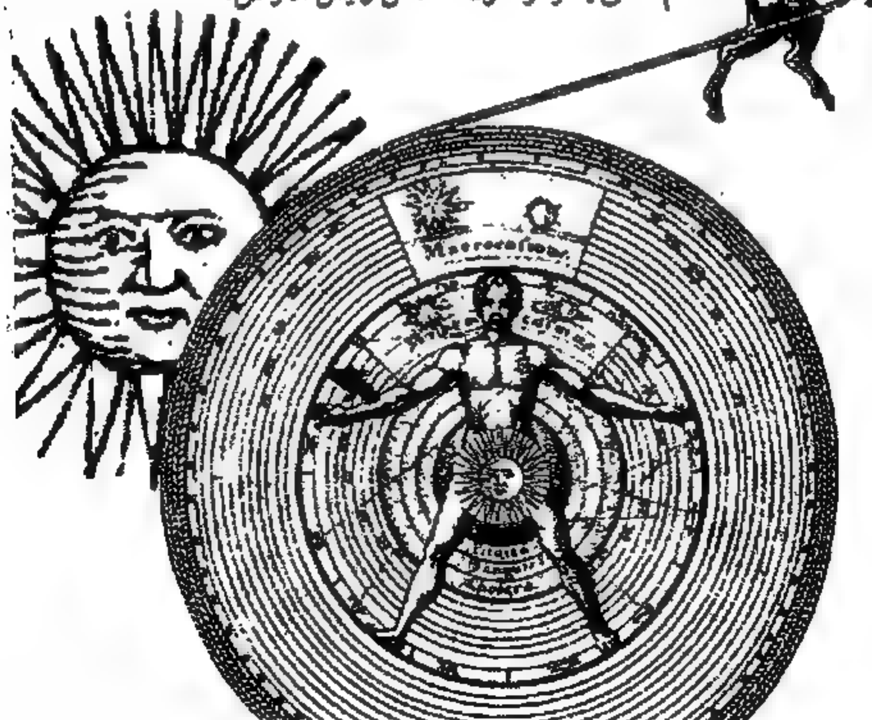
(حيث أن أ هو طول الضلع الدائرى و $\hat{\text{أ}}$ هي الزاوية المقابلة له).

كتب ثابت بن قرة (المتوفى عام ٩٠١) في نظرية الأرقام واستخدامهم في وصف النسب بين الكميات الهندسية وهي خطوة لم يخطها اليونانيون أبداً.



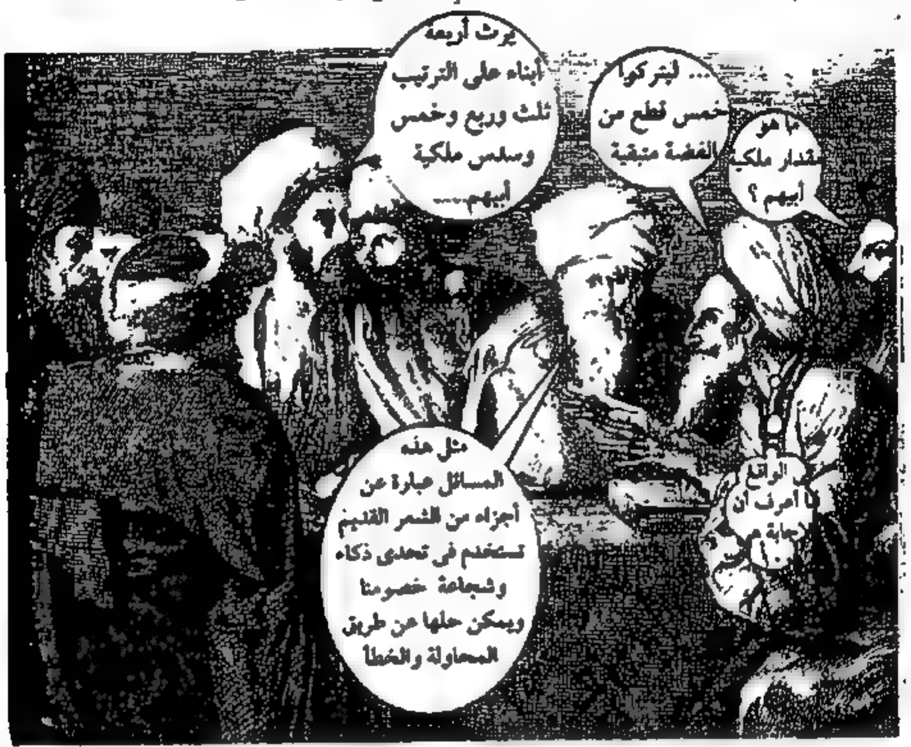
الطوسى

يعتبر ناصر الدين الطوسى (المتوفى عام ١٢٧٤) أفضل العلماء في مجال حساب المثلثات بنوعيه المستوى والكروى. ومعالجته المبنية على الفهم لتحليل المثلثات الكروية تعتبر واحدة من الدراسات المؤسسة لتطوير علم الرياضيات. وقد أسس أزواج طوسى والتى وضح من خلالها أن الحركة فى خط مستقيم ذهاباً وإياباً يمكن تمثيلها على هيئة تراكب حركتين دائرتين. وقد مكن هذا البحث العالم نيقولاس كوبرنيكوس (١٤٧٣ - ١٥٤٣) من تمثيل حركة الكواكب المعقدة على هيئة حركة دائرية مركبة وذلك سهل عليه إنشاء نظام فلكى يتمركز حول الشمس وليس الأرض.



حل المسائل التى تتضمن أرقاماً صحيحة

ظلت المسائل التى لها حلول عبارة عن أرقام صحيحة شائعة على مر القرون، فهذه هى الأرقام التى يفهمها التلاميذ. ومثال تلك المسائل هو مسألة الوراثة :



وتم التوصل لأول تقريب لهذه المسائل بواسطة ديوفانتوس (٢٧٥) وكان علماء الرياضيات المسلمون على درجة عالية من النشاط فى تطوير هذا العمل. وكانت نقطة البدء الطبيعية هى أرقام فيثاغورث مثل ٣، ٤، ٥ والتى تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، وتم تعميم هذه العلاقة وقام العلماء المسلمون بالبحث عن حل صحيح للمعادلة $س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن}$. وكان هناك العديد من علماء الرياضيات من قاموا بإثبات استحالة حل هذه المعادلة ومن ضمن هؤلاء كان فيرمان لو الذى سميت هذه المسألة باسمه. وقام العلماء التالين باكتشاف بعض الأخطاء التى بينت أن هذه المسألة صعبة جداً بالفعل !

نشأة الرياضيات الأوروبية

اعتمدت الرياضيات الأوروبية فى تطورها على المساهمات من كل الحضارات الأخرى، فخلال العصور الوسطى كانت أوروبا أقل شأناً من الحضارات الأخرى فى كل نواحي التقنية والعلوم والثقافة . وقد بدأت في اللحاق بالركب عن طريق الاحتكاك الثقافى أثناء الحملات الصليبية ومن خلال الحوار بين العلماء فى كل من أسبانيا وإيطاليا. وقد تم نقل وترجمة الأعمال العربية سواء إذا كانت مترجمة من اليونانية أو أعمالاً أصلية وذلك بواسطة فرق عمل متضمنة الوساطة اليهودية فى بعض الأحيان.



ومن بقايا هذه العملية الأسماء العلمية التى تبدأ بـ "الـ" مثل الجبر والكحول (Algebra & Alcohal). وقد تم إعادة اكتشاف العلاقات الفيثاغورثية من الرياضيات الفنية والصوفية خلال عصر النهضة فى القرن الخامس عشر.

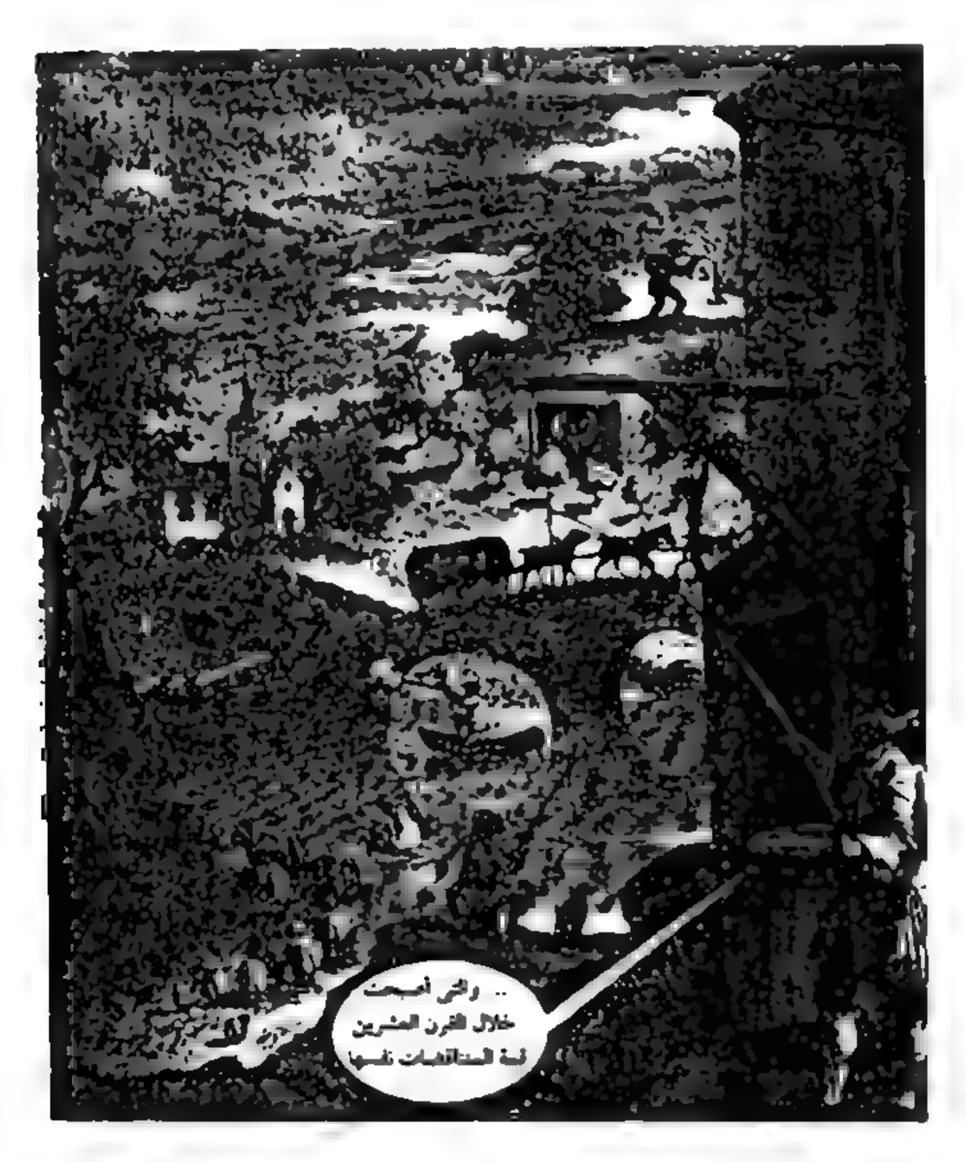




وكانت الرياضيات لها دور أساسى فى الإبحار فى أعالى البحار وتم تطبيقها فى كثير من المجالات مثل الدفاع (تصميم الحصون) والهجوم (مصاطب المدفعية) فى داخل الأوطان. وكانت المجالات مثل حساب المثلثات هامة جداً لنجاح هذه المغامرات، وقد تم تقدمها فى كلا المجالين التجريبى والنظرى.

هذا بالإضافة إلى التطور المتتابع للعلوم التجارية والتى تطلبت تحسين طرق المحاسبة. وقد دعت الكنيسة فى البداية لاستخدام الأرقام العربية والاحتفاظ بالكتب ذات اللغتين (العربية والأوروبية على سبيل المثال). وكان ذلك لا يحتاج إلى تبرير ولكنه أمر واجب القبول. وفى هذه الأيام أصبحت هذه الأمور هامة جداً للدرجة يصعب معها إهمالها أو تجاهلها.

وقد صاحب تطور الرياضيات الأوروبية في المجال النظري بعض الأزمات والمتناقضات. لقد أصبحت الأرقام السالبة والأرقام غير النسبية (والتي نادراً ما أزعجت الصينيين والهنود والمسلمين) على درجة عالية من الصعوبة بالنسبة لعلماء الرياضيات الأوروبيين حتى أثناء استخدامهم بنجاح باهر. وفي الحال أدت هذه المتناقضات إلى ظهور مجالات جديدة من الرياضيات ...



رينيه ديكارت

ويلاحظ أن أعظم مبتكر أوروبي في الرياضيات هو الفرنسي رينيه ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠) والذى كان فيلسوفاً أيضاً. ومن خلال أبحاثه الشخصية في التأكد تحول من تعلم الأدب الإنساني إلى متابعة الرياضيات، ولكنه في البداية كان محبطاً.



لماذا كان ديكارت على هذه الدرجة العالية من الاستخفاف بالجبر لدرجة أنه أراد أن يحسنه؟ حسناً، فقد كان الجبر مصاغاً جزئياً في خلال القرن السادس عشر، فقد كانت هناك بعض النقاط العامة ذات الأسماء المختصرة التي لم تكن على درجة وصف واضحة ولا حتى تمت معالجتها بطريقة بارعة. ولكن بالنسبة لعلماء الرياضيات في ذلك الوقت كانت هناك أمور أسوأ، فقد وجدوا أنفسهم يقومون بوصف أشياء تافهة أو سيئة!

لقد ذكرنا سابقاً الأرقام التخيلية، وهي حلول المعادلات مثل س² = -١ ، إلى أي نوع من الأرقام تنتمي هذه الأرقام ؟

نحن لا نستطيع عد الأشياء بواسطة هذه الأرقام. أيضاً ما هي الكميات الفيزيائية التي يعطي مربع قياسها كميات سالبة ؟ هذا يعني أنه يلزم التعامل مع هذه الأرقام بمعالجة بارعة لبعض القواعد، وفي النهاية لا توجد دواعي للقلق من كتابة الهراءات مثل تلك !

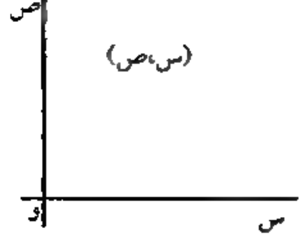


الهندسة التحليلية

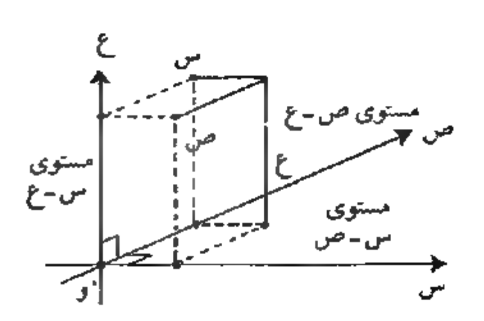
ظهرت الهندسة التحليلية أو هندسة الإحداثيات كنتيجة لمجهودات ديكارت. وتبنى الهندسة التحليلية على فكرة أن أى نقطة فى الفراغ يمكن ...



فى الهندسة المستوية يوجد محوران متعامدان نطلق عليهما «محور س» و«محور ص». ويمكن تحديد موقع أى نقطة فى المستوى بواسطة إحداثياتها (س،ص) والتى تعطى المسافة بين تلك النقطة ونقطة الأصل على المحور بين س و ص ، ونقطة الأصل هى نقطة تقاطع المحورين.



أما فى حالة الثلاثة أبعاد فيوجد ثلاثة محاور متعامدين تبادلياً وهم محور س و ص و ع





وأبسط شكل يمكن تمثيله هو الخط المستقيم الذى يوصف بواسطة المعادلة الخطية ص= أ س + ب حيث أ، ب ثوابت

والمعادلة ص = س ٢
نصف القطع المكافئ

... الذى يزداد
سريعاً لأعلى ..

.. أما المعادلة $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

فتصف شكلاً بيضاوياً
والذى يشبه دائرة
مضغوطة فى أحد
الاتجاهات

الاعتدك على
الاعتقاد بأن الأشكال
مملة ولكن هذه الأشكال
أكثر جمالاً .



... وهى القطع الزائد الذى يتم تمثيله بواسطة المعادلة $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$. وإشارة السالب هى التى تقوم بكل أشكال الاختلافات حيث

إن هذا المنحنى عبارة عن فرعين يزدادان بسرعة إلى ما لا نهاية

حدود المخروط

دائرة

قطع زائد

هذه قطاعات من مخروط هل ترى

Ellipse

قطع مكافئ

بيضاوي

الدوال

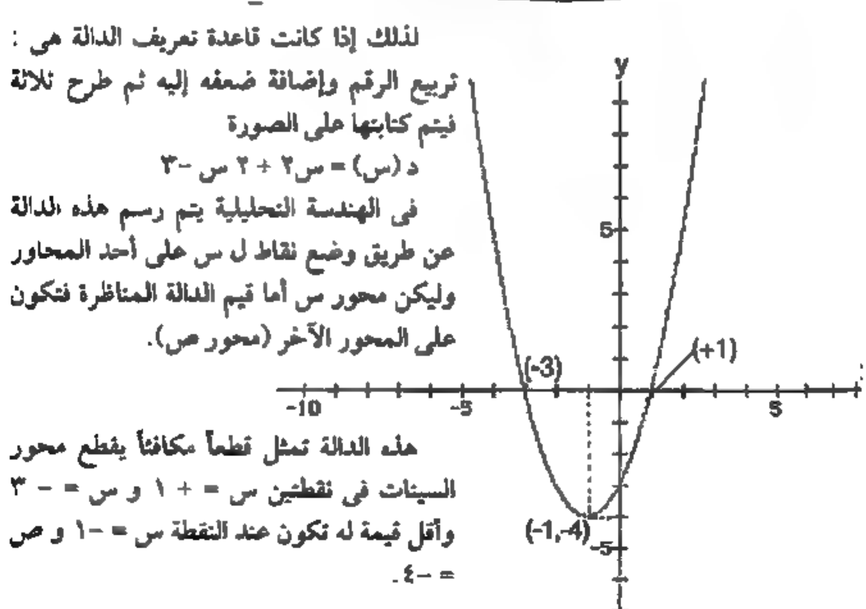
تقوم الدوال بإظهار صورة اعتماد أو علاقة متغير ما بمتغير أو متغيرات أخرى، فنقول إن ص هى دالة فى س أو أن ع هى دالة فى س و ص. (نستخدم الحروف فى آخر الأبجدية للتعبير عن المتغيرات، أما تلك فى بداية الأبجدية فتعبر عن الثوابت فى غالب الأحيان كما استخدمهم ديكارت).



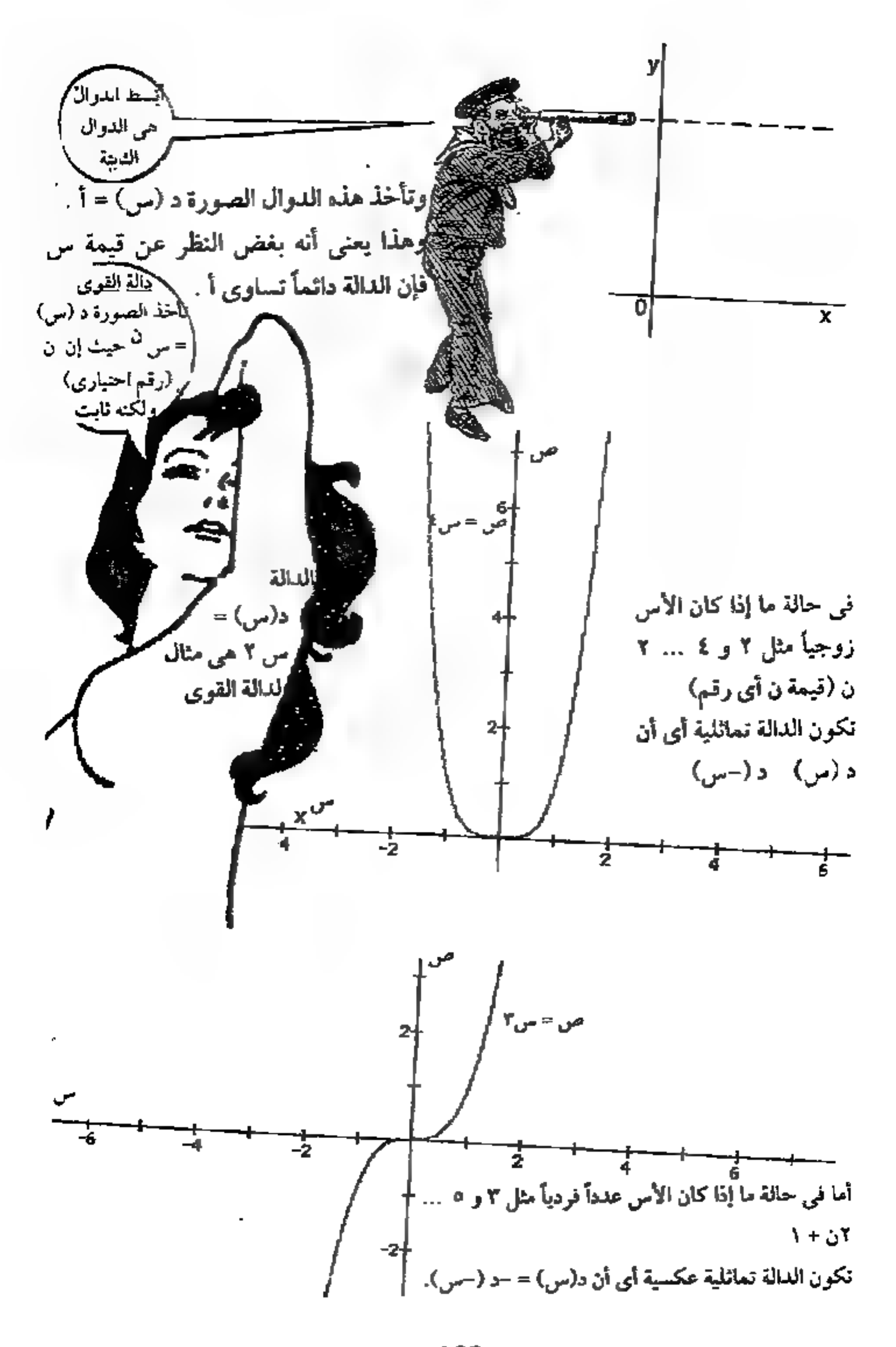
لذلك إذا كانت قاعدة تعريف الدالة هى : تربيع الرقم وإضافة ضعفه إليه ثم طرح ثلاثة فيتم كتابتها على الصورة

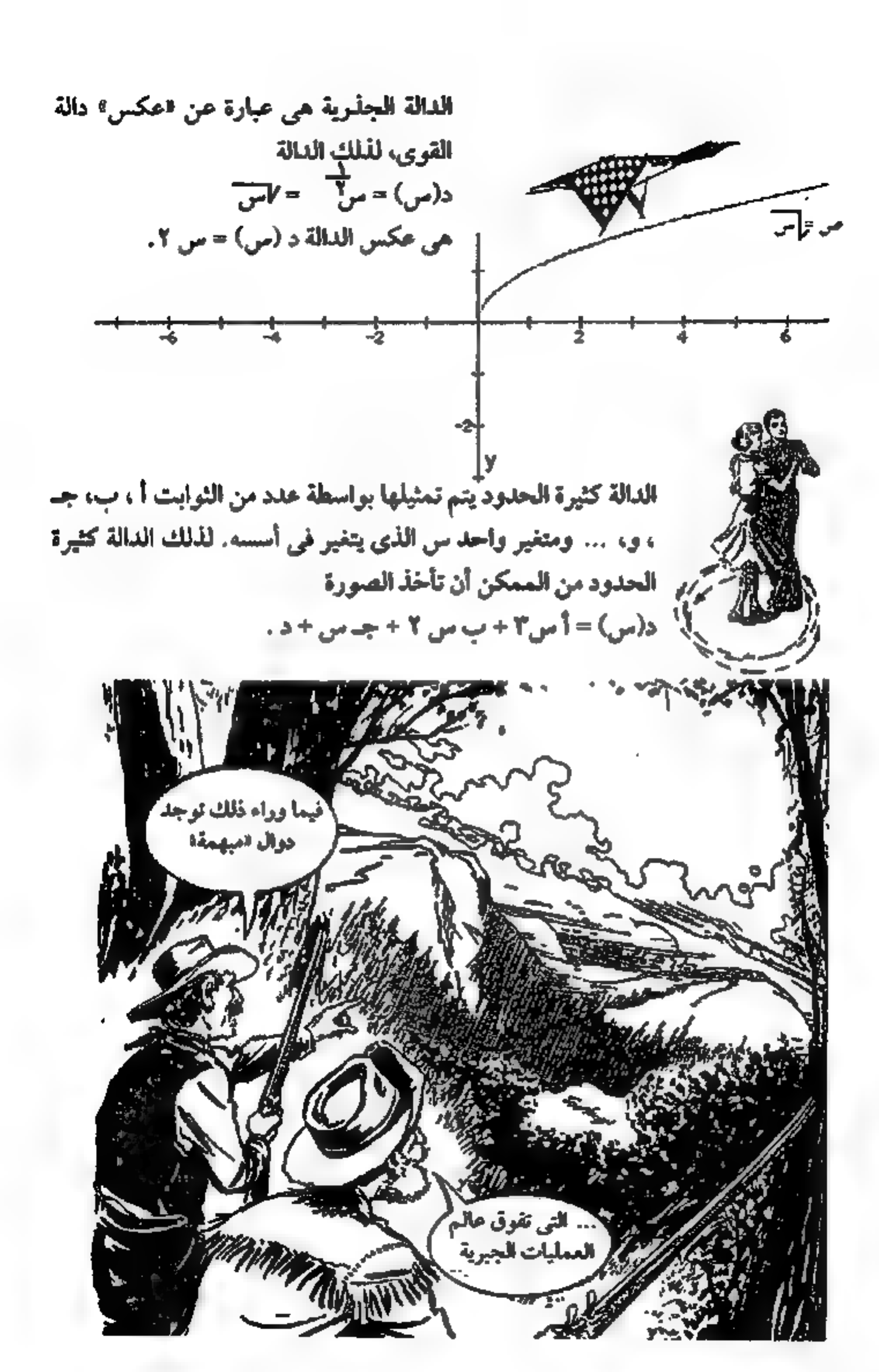
د (س) = س٢ + ٢ س -٣

فى الهندسة التحليلية يتم رسم هذه الدالة عن طريق وضع نقاط ل س على أحد المحاور وليكن محور س أما قيم الدالة المناظرة فتكون على المحور الآخر (محور ص).



هذه الدالة تمثل قطعاً مكافئاً يقطع محور السينات فى نقطتين س = + ١ و س = - ٣ وأقل قيمة له تكون عند النقطة س = -١ و ص = -٤.


أبسط الدوال هى الدوال الثابتة
وتأخذ هذه الدوال الصورة د (س) = أ .
وهذا يعنى أنه بغض النظر عن قيمة س فإن الدالة دائماً تساوى أ .
y
0
x
دالة القوى تأخذ الصورة د (س) = س ن حيث إن ن (رقم اختيارى) ولكنه ثابت
ص
6
ص = س٢
4
2
الدالة د(س) = س ٢ هى مثال لدالة القوى
فى حالة ما إذا كان الأس زوجياً مثل ٢ و ٤ ... ٢ ن (قيمة ن أى رقم) تكون الدالة تماثلية أى أن د (س)   د (–س)
x ص
-4 -2 2 4 6
ص
ص = س٣
2
س
-6 -4 -2 2 4 6
-2
أما فى حالة ما إذا كان الأس عدداً فردياً مثل ٣ و ٥ ... ٢ن + ١
تكون الدالة تماثلية عكسية أى أن د(س) = –د (–س).



الدالة الجذرية هى عبارة عن «عكس» دالة القوى، لذلك الدالة

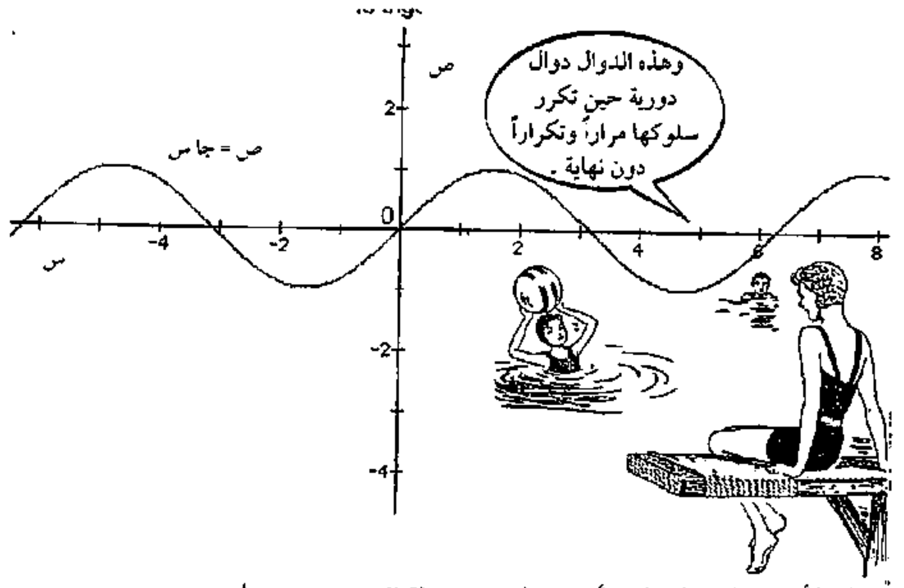
د(س) = س$^{\frac{1}{٢}}$ = $\sqrt{\text{س}}$

هى عكس الدالة د (س) = س ^{٢}.

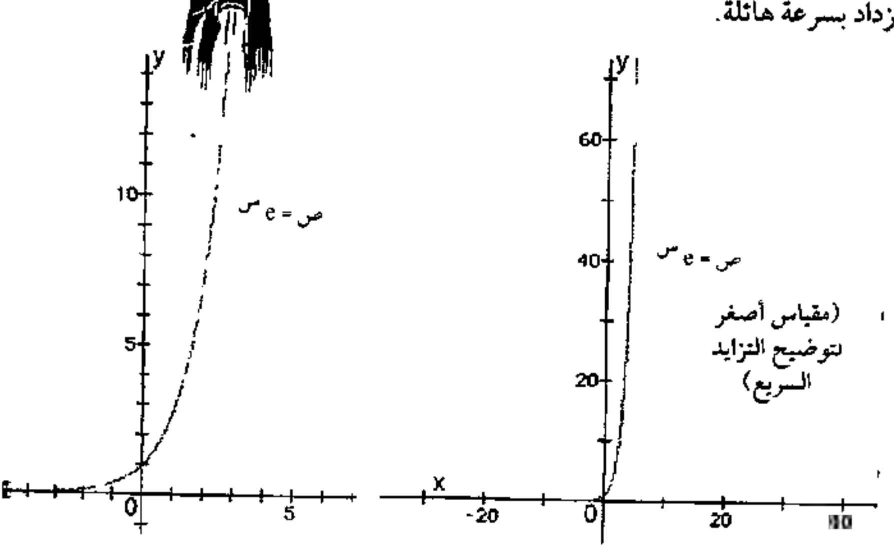
الدالة كثيرة الحدود يتم تمثيلها بواسطة عدد من الثوابت أ ، ب، جـ ، و، ... ومتغير واحد س الذى يتغير فى أسسه. لذلك الدالة كثيرة الحدود من الممكن أن تأخذ الصورة

د(س) = أ س^{٣} + ب س ^{٢} + جـ س + د .

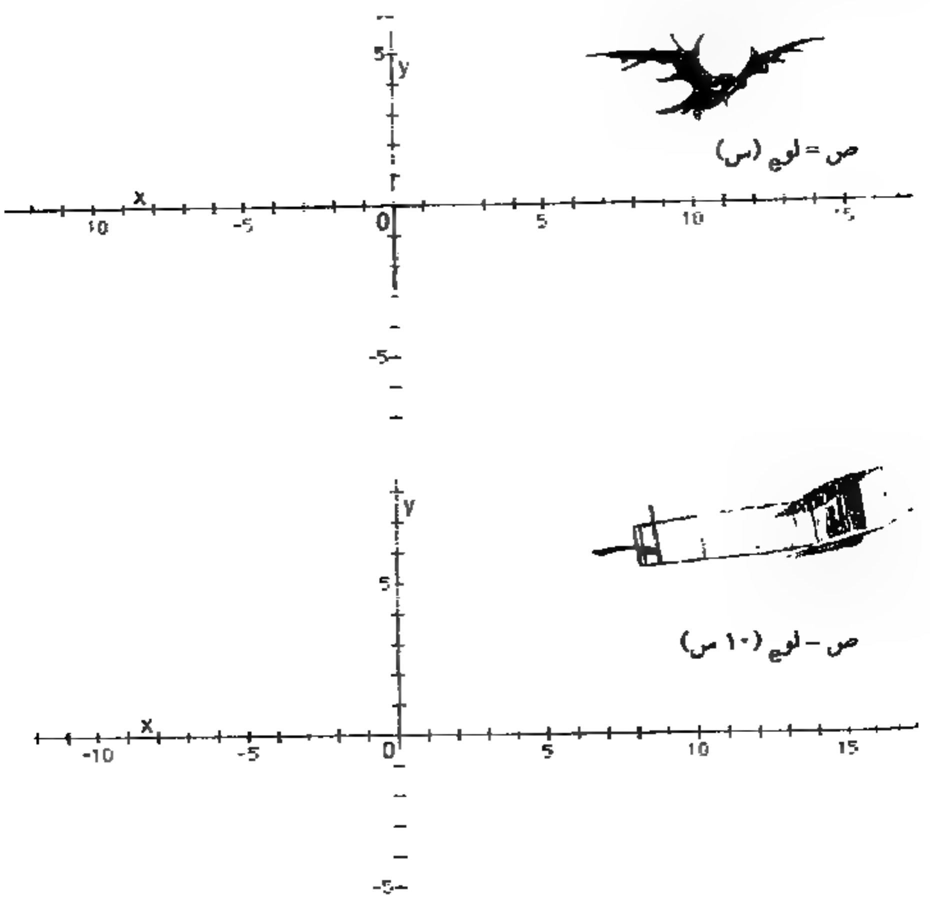
أما الدوال المثلثية فتستخدم النسب المثلثية مثل جا وجتا، وأحد هذه الدوال هي د (س) - جا س



الدوال الأسية مثل د (س) = أ^س^ تختلف عن دالة القوى فى أن الرقم الثابت فى هذه الحالة يكون هو الأساس أما س فهو الأساس. والدوال الأسية ذات أساس أكبر من واحد تزداد بسرعة هائلة.



الدوال اللوغارتمية هى عكس الدالة الأسية وتكتب على الصورة د(س) = لو$_{أ}$ (س) ؛ ويسمى الرقم أ بأساس اللوغاريتم. وتتزايد هذه الدوال تزايداً بطيئاً جداً. ومثال تلك الدوال : لو$_{أ}$(١٠س) = لو$_{أ}$(س) + لو$_{أ}$(١٠)



واللوغاريتمات التى نستخدمها فى الجداول لها أساس عشرة. وفى الكمبيوتر (والذى يعمل بالحسابات الثنائية المبنية على الرقمين صفر وواحد) يكون الأساس المناسب هو اثنان. وفى حالة الرياضيات النظرية فإن الأساس المفضل هو :

ث = ٢,٧١٨٢٨٠٠٠

وهذا هو «أبو كل الأساسات» والذى يمثل الدالة الأسية د(س) = $e^{س}$ والتى لها معدل تزايد مساوٍ تماماً لحجمها.

الدوال هى أدوات التحليل الرئيسية التى تستخدم فى التفاضل والتكامل

التفاضل والتكامل



كانت أعمال ديكارت هى أوج عملية تحرير الجبر من الكلمات ، تماماً مثلما فعلت الهندسة اليونانية من تحرير الإنشاءات من الأرقام. وقد انطلق تطور الجبر بمجرد أن وضع ديكارت صيغة لوصف العلاقات الجبرية . وخلال أربعين عاماً من نشر الهندسة الجبرية لديكارت قام العالم الرياضى الفيلسوف الألمانى جوتفريد ويليام فون ليبنز (١٦٤٦ ـ ١٧١٦) بابتكار جبر للانهاية. وهذا هو ما نسميه التفاضل والتكامل وهو أداة فعالة فى تحليل النمو والتغير بصفة عامة.

المتغير س

الدالة د (س)

المنحنى ص = د(س)

ميل المماس = المشتقة

دَ(س) = ء ص / ء س

المساحة تحت المنحنى بين نقطتين س = أ و س = ب

د (س) = ء س

ليبنز

مكان الجسم المتحرك : س

السرعة أو الجريان : س'

نيوتن

أما السير إسحق نيوتن (١٦٤٢ ـ ١٧٢٧) فقد قام باكتشاف مماثل لذلك فى فترة سابقة نوعاً ما ولكنه قام فقط باستخدام ملاحظات ديكارت فى صورة موسعة بدلاً من الإضافة إليه لذلك فإن الصورة التى وضعها ليبنز للتفاضل والتكامل هى الصورة السائدة هذه الأيام. لذلك فإن الفيلسوفين ديكارت وليبنز هما اللذان وضعا الأفكار والملاحظات التى شكلت الرياضيات بعد ذلك.

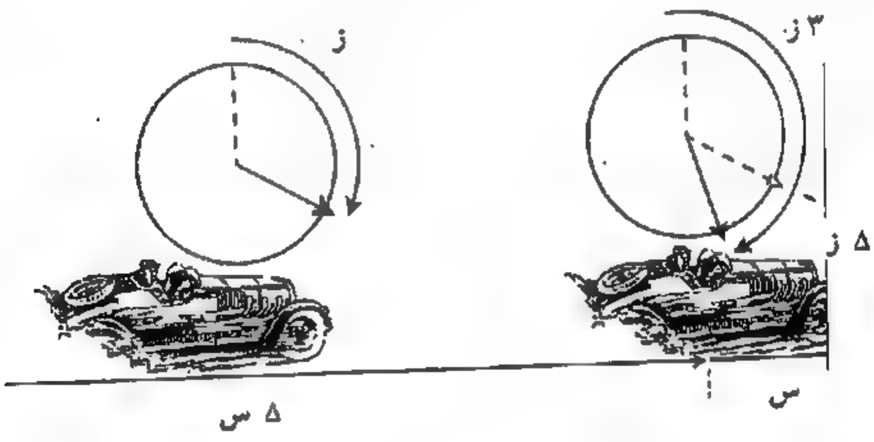


التفاضل



عملية إيجاد كيفية تغير كمية ما تسمى التفاضل، فعندما نقوم بتفاضل دالة ما فإننا نحصل على معدل تغيرها .

فإذا أخذنا في الاعتبار مركبة تسير في طريق ما ، فإننا نجد أن موقعها يتغير بصورة متصلة على طول الطريق. وعند أي زمن ز يكون موقعها س متمثلاً بواسطة الدالة المتصلة س(ز).



٢- مع استمرار المركبة في الحركة فإن موقعها سيتغير وليكن هو س+ Δ س وذلك بعد مرور برهة من الوقت Δ ز .

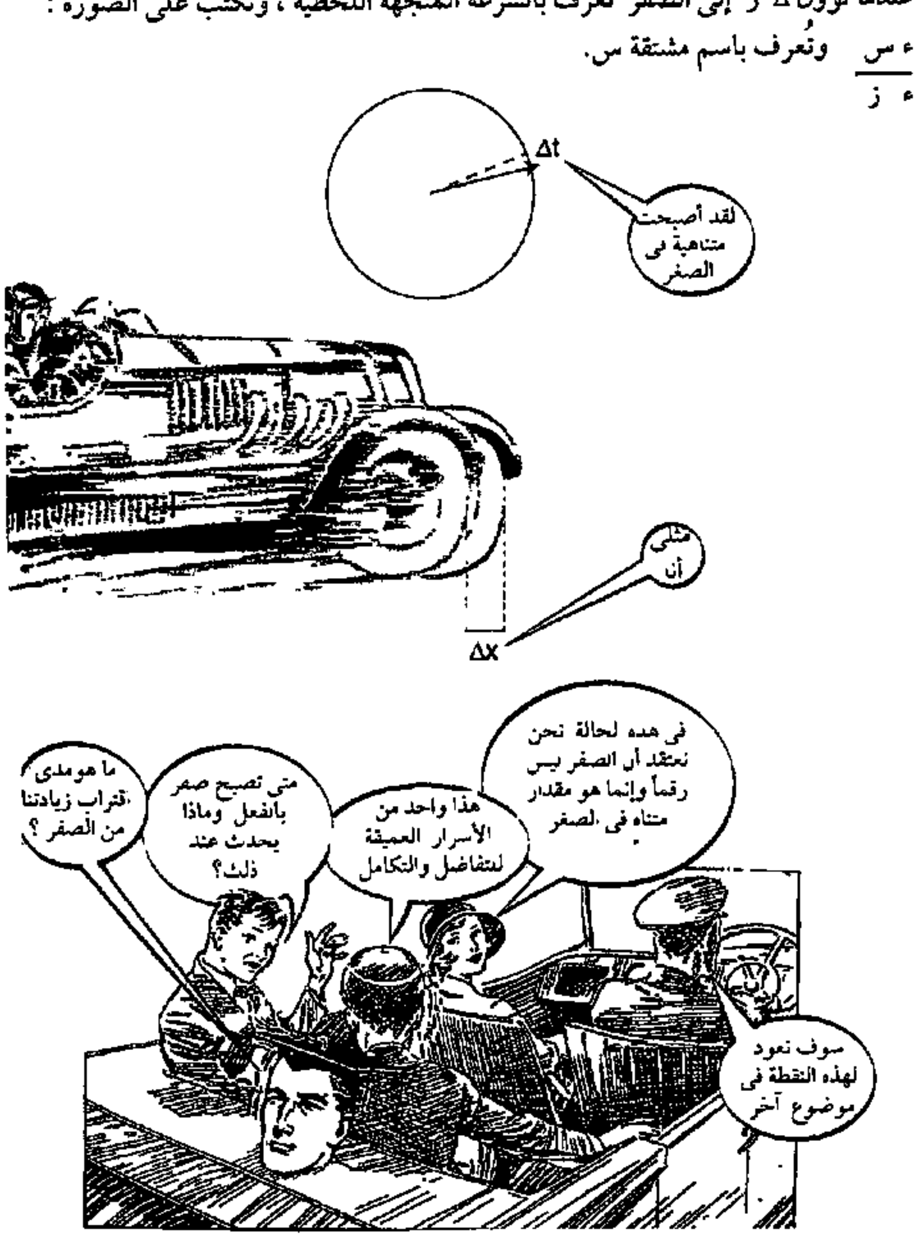
٤- تصل هذه المركبة إلى موقعها الجديد بعد مرور وقت عبارة عن مجموع الوقت الابتدائي ز بالإضافة إلى البرهة Δ ز أي أن الوقت الكلي هو ز + Δ ز .

ما هي السرعة المتوسطة أو بعبارة أكثر فنية ما هي السرعة الاتجاهية المتوسطة لهذه المركبة ؟ هي عبارة عن المسافة المقطوعة مقسومة على الوقت اللازم لقطع هذه المسافة أي أنها :

$$\frac{\Delta س}{\Delta ز} = \frac{د(ز + \Delta ز) - د(ز)}{\Delta ز}$$

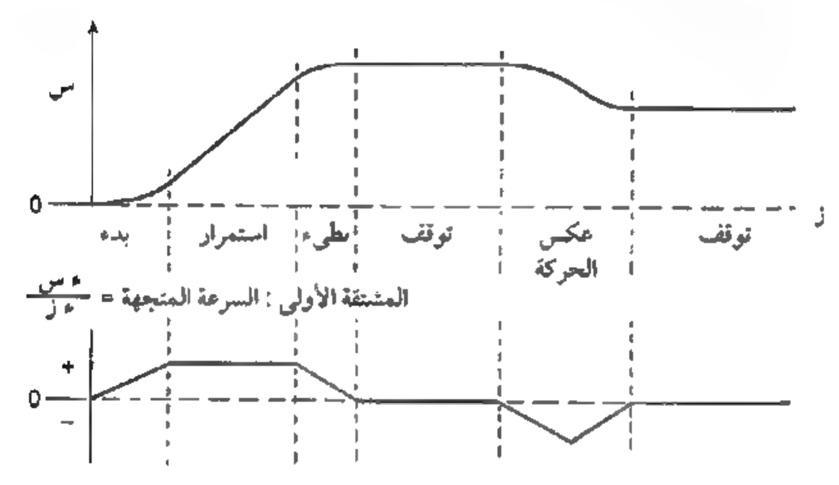
وإذا افترضنا أننا نريد أن نعرف سرعةأي جسم متحرك عند أي لحظة ز أو معدل تغير س عند زمن معين ز ، نستطيع أن نحسب ذلك عن طريق تقليل الزيادة في الزمن Δ ز بقدر الإمكان حتى نصل إلى الصفر .وفي هذه الحالة فإن نهاية السرعة المتوسطة $\frac{\Delta س}{\Delta ز}$ عندما تؤول Δ ز إلى الصفر تعرف بالسرعة المتجهة اللحظية ، وتكتب على الصورة :

$\frac{ء س}{ء ز}$ وتُعرف باسم مشتقة س.





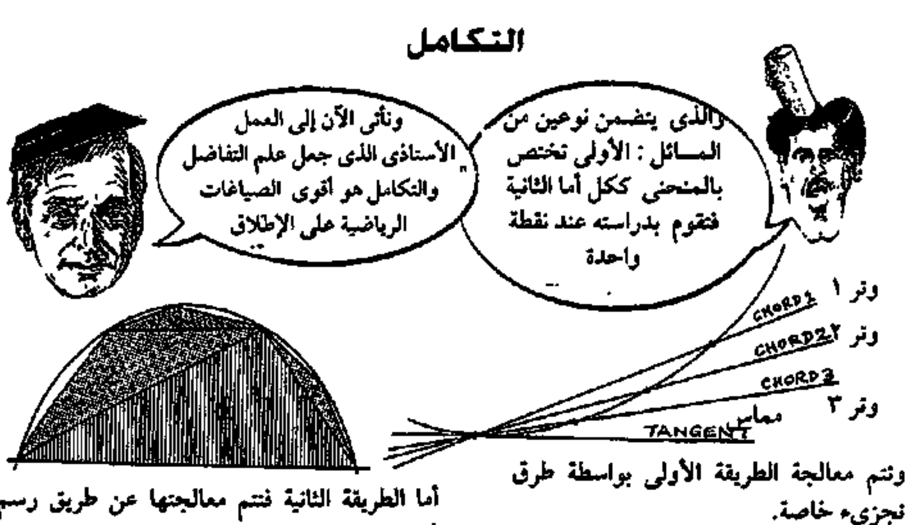
وإذا قمنا برسم س كدالة في ز فإن المشتقة تعبر عن ميل المماس للمنحنى عند ز.



ويمكننا أيضاً القيام باشتقاق المشتقة لنحصل بذلك على المشتقة الثانية، وفي مثالنا هذا للمركبة على الطريق فإن المشتقة الثانية: تعطينا معدل تغير السرعة أو العجلة.



التكامل



ونتم معالجة الطريقة الأولى بواسطة طرق تجزىء خاصة.

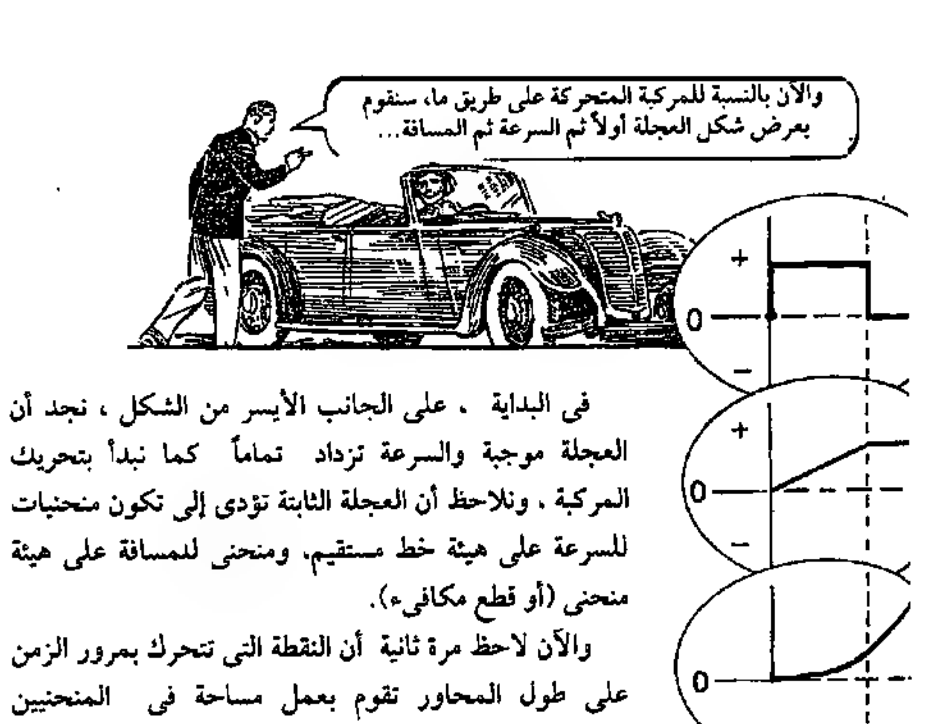
أما الطريقة الثانية فتتم معالجتها عن طريق رسم أوتار تمر بتلك النقطة.

وبمجرد فهم أن المنحنيات هى عبارة عن رسومات للدوال فإن مسائل المساحة يمكن أن ترى بوجهتى نظر مختلفتين. فى إحدى الطرق يمكن تجزىء المساحة بواسطة شرائح رفيعة رأسية أما الطريقة الأخرى فتعتبر أن المساحة هى دالة جديدة والتى لها مشتقة تساوى الدالة الأصلية. وعلى ذلك فإن هناك طريقة واحدة تتضمن المشتقة وممكوسها يمكن أن تقوم بحل كلا نوعى المسائل.

دعنا نبدأ بالمشتقات وممكوساتها

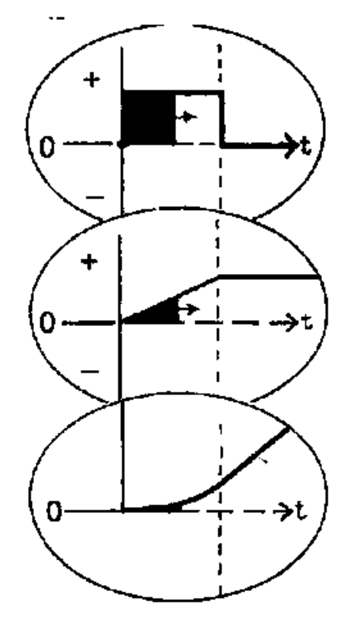
ويمكننا توضيح مدى فاعليتها باستخدام مثال المركبة التى تتحرك على طريق ما والأشكال الثلاثة للمسافة والسرعة والعجلة.. وبدلاً من البدء بدالة المسافة تم القيام باشتقاقها دعنا نبدأ بالمشتقات ونعود بطريقة عكسية إلى دالة المسافة.





في البداية ، على الجانب الأيسر من الشكل ، نجد أن العجلة موجبة والسرعة تزداد تماماً كما نبدأ بتحريك المركبة ، ونلاحظ أن العجلة الثابتة تؤدى إلى تكون منحنيات للسرعة على هيئة خط مستقيم، ومنحنى للمسافة على هيئة منحنى (أو قطع مكافيء).

والآن لاحظ مرة ثانية أن النقطة التي تتحرك بمرور الزمن على طول المحاور تقوم بعمل مساحة في المنحنيين



السفليين ، وهذا هو مفتاح فهم التكامل بأكمله ، لذلك راقب جيداً عن قرب.

بالنسبة لمنحنى العجلة نلاحظ أن المساحة المتزايدة تقوم بمسح مستطيل وتزداد مساحته تناسبياً مع الوقت المقطوع ، وهذا تماماً هو نفس سلوك منحنى السرعة !

وبالنسبة لمنحنى السرعة فهو يمثل مثلثاً متزايداً وتزداد مساحته في البداية ببطءٍ ثم بعد ذلك بسرعة أكبر، وذلك هو نفس سلوك منحنى المسافة!

والذى نستنتجه من ذلك أنه إذا كانت دالة ما هى مشتقة دالة أخرى فإن هذه الدالة الثانية هى دالة المساحة للدالة الأولى.

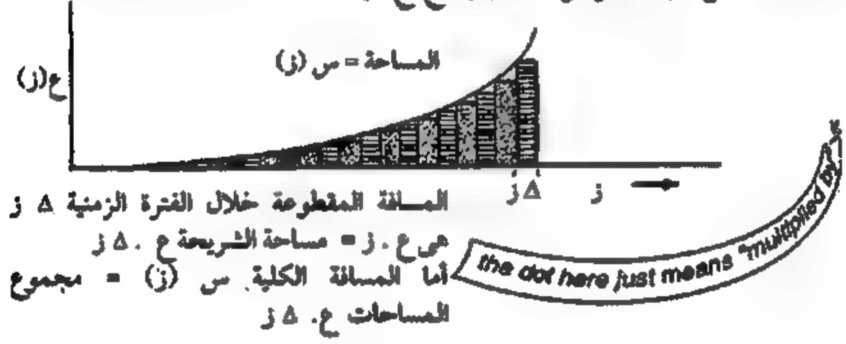


وتستطيع محاولة هذه العملية بنفسك عن طريق ملاحظة ما يحدث عندما تعكس السيارة حركتها على الطريق، فى هذه الحالة تكون العجلة سالبة مما يؤدى إلى تكون مساحة سالبة (أسفل محور الزمن) وبالتالى تتجه السرعة إلى القيمة السالبة بمعدل ثابت. ونلاحظ أن المسافة تتناقص حيث يتم تمثيلها بقطع مكافىء مقلوب.

وعند توقف السيارة فإن العجلة تكون مساوية للصفر وكذلك السرعة وتأخذ المسافة قيمة ثابتة.



فإذا بدأنا بمنحنى السرعة ع(ز) وتخيلنا أن المساحة أسفل هذا المنحنى عبارة عن شرائح رفيعة جداً كل منها له عرض Δ ز وارتفاع ع (ز).



المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية Δ ز هي ع . ز = مساحة الشريحة ع . Δ ز
أما المسافة الكلية س (ز) = مجموع المساحات ع . Δ ز

وكل من تلك الفترات تقوم بوصف المسافة المقطوعة بسرعة ثابتة ع خلال الفترة الزمنية ز

وبذلك فإن المساحة الكلية تحت المنحنى هي مج (كل الشرائح ع(ز) . Δ ز)



ليبنيز



لكى نرجع إلى التعريف السابق وهو عكس المشتقة فإن كل ما نحتاج تخيله هو الشريحة الرقيقة السابقة وهى Δ س نفسها.

وحيث إن $\Delta \text{س} = \text{ع} . \Delta \text{ز}$.

فإن $\frac{\Delta \text{س}}{\Delta \text{ز}} = \frac{(\text{ع} . \Delta \text{ز})}{\Delta \text{ز}}$

ولذلك فإن $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ز}} = \text{ع} (\text{ز})$

وعلى ذلك فإن مشتقة الدالة المتكاملة التى تم تعريفها من خلال مجموع الشرائح هى نفسها الدالة التى تُعبر مساحاتها عن الدالة المتكاملة.

والآن من السهل أن نوجد مشتقات الدوال سواء إذا كان بصورة جبرية أو بواسطة بعضٍ الدوال. ولإيجاد الصورة الجبرية لدالة المساحة فإننا نقوم بالبحث عن تلك الدالة التى تُعبر مشتقتها عن الدالة الأصلية ويتم اختزال المسائل التى تختص بدراسة خواص المنحنى ككل إلى مسائل أبسط تدرس خصائص المنحنى عند نقطة.





وقد تم تطبيق التفاضل والتكامل في مجالي الميكانيكا والفلك.

وأدى استخدام المعادلات التفاضلية في الفيزياء إلى نشأة الفيزياء الرياضية، وبفضلها فقط استطعنا أن ندرس علوم الحرارة والطاقة والكهربية والمغناطيسية، ويعتمد العلم الحديث والطب بدعم التكنولوجيا المتقدمة، بصورة مباشرة تماماً على التفاضل والتكامل.

أسئلة بيركلى

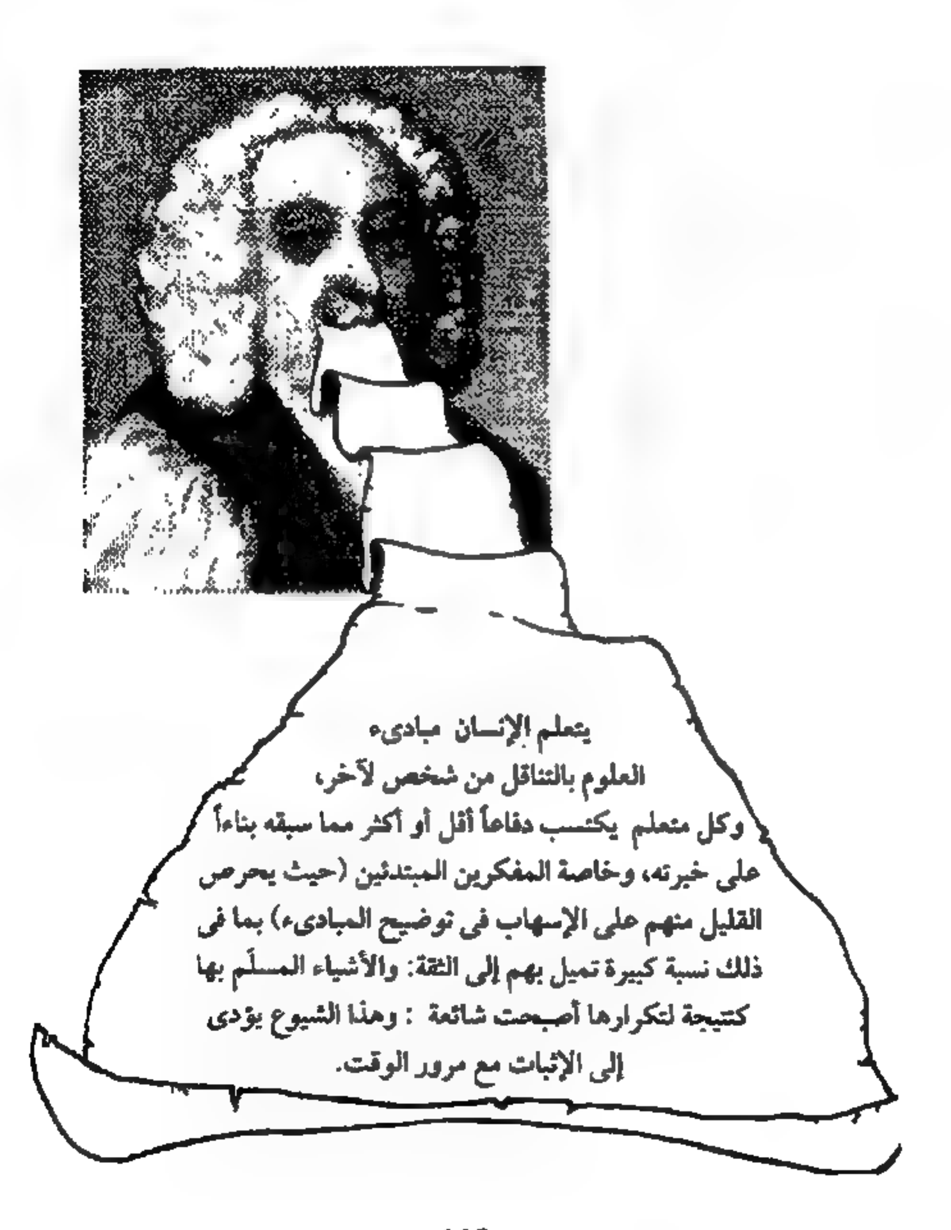
ماذا عن هذه الزيادة الصغيرة ولغز كيفية وصولها للصفر ؟ سأل الناس هذا السؤال فى وقت نيوتن وليبنيز وكانت الإجابة غير مُرضية عند ذلك قام الفيلسوف والأسقف الإنجيلى الأيرلندى جورج بيركلى بطرح الأسئلة فى صورة حادة جداً.



وكان هدف بيركلى هو توضيح أن الملحدين الذين طالبوا بسرعة إحلال الألغاز والخرافات الدينية بالعلم والعقل كانوا على درجة من الجهل العقائدى مثلهم مثل أسوأ علماء الدين.

وقد سأل فى افتتاحية كتيبه: «.. هل أن الأهداف والمبادىء والتداخلات الموجودة فى التحليل الحديث قد تم فهمها بوضوح وإثباتها بالدليل أكثر من الألغاز الدينية ونقاط الإيمان؟» وكانت الإجابة واضحة بالنسبة له...

وقد اتجه علماء الرياضيات إلى الإجابة على الأسئلة التى وردت فى كتيب بيركلى الذى أسماه «المحلل» وقد استخدم بيركلى هذه الإجابات ليواجه ارتباكاتهم بصرامة، وكان رده : إن دفاع أصحاب الأفكار الحرة فى الرياضيات يعتبر عملاً أستاذياً فى التحليل الحرج.



وقد حاول بيركلى أن يوضح أن تعلم حل المسائل فى الرياضيات والعلوم لا يساعدنا بالضرورة على فهم ما يدور حوله. وقد توقع صورة البحث العلمى الذى تم تطويره بواسطة ت. س ـ كون الذى قام بوصف «العلوم العادية» كعملية تدريب على «حل الألغاز» من خلال مثال (إطار التفكير) لم تتم الإجابة عليه وهو بالفعل لا يمكن الإجابة عليه طوال فترة عمله .وبالنسبة لكون العلم العادى فى الواقع عبارة عن تدريب لأصحاب العقول الضيقة، وعملية تدريس العلوم (بما فيها الرياضيات) هى بالضرورة شىء جازم بدون دليل.



إلـة أويلر

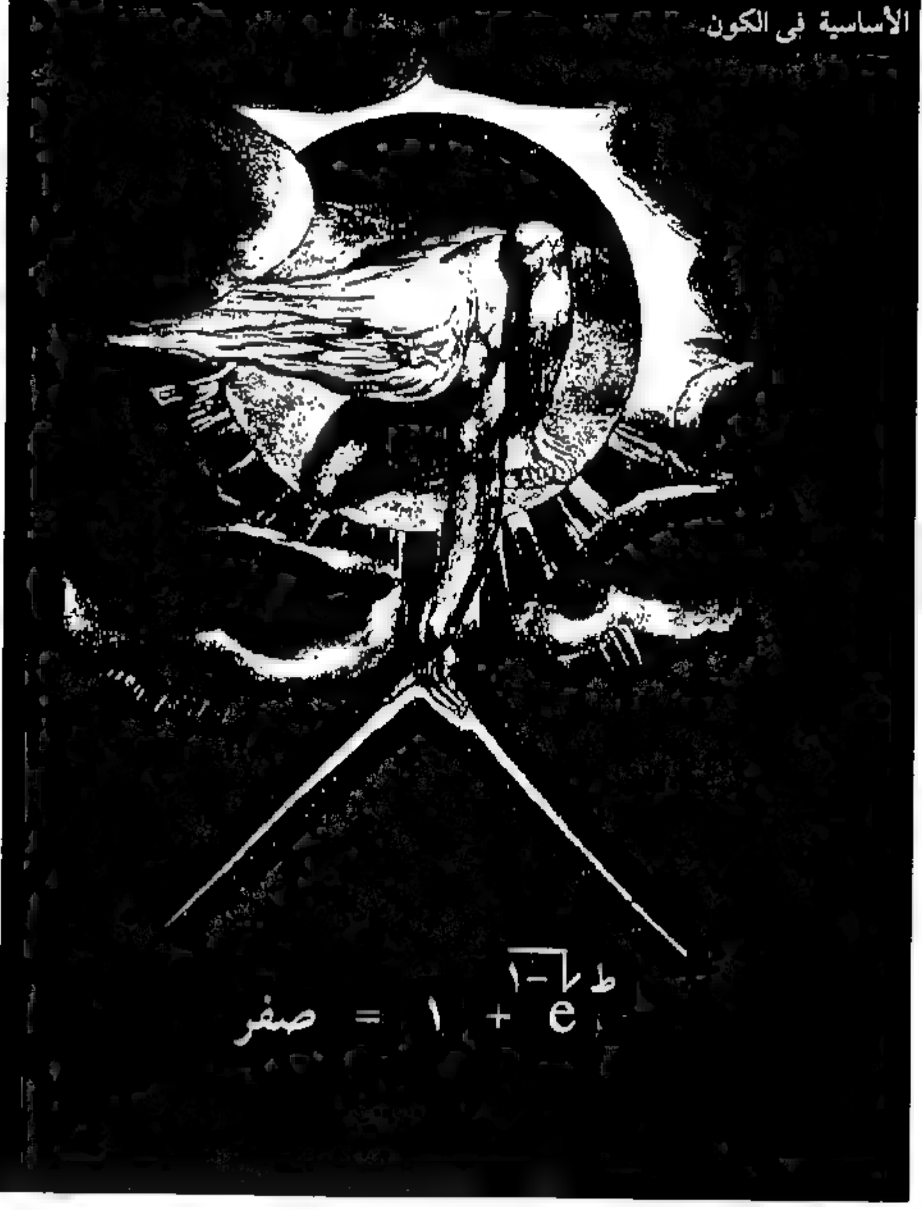
كان العالم السويسرى ليونارد أويلر (١٧٠٧ - ٨٣) أول من ربط بين الدوال الأسية والدوال المثلثية ووضع صيغة لعلاقتهم. كان لأويلر عبقرية غير عادية فى الرياضيات وهناك الكثير من القصص حول براعته الفائقة. وكان أويلر موظفاً فى بلاط قصر فريدريك ملك بروسيا حينما قابل الفيلسوف الفرنسى دينيس ديدروت (١٧١٣ - ٨٤) الذى كان ملحداً متعصباً..

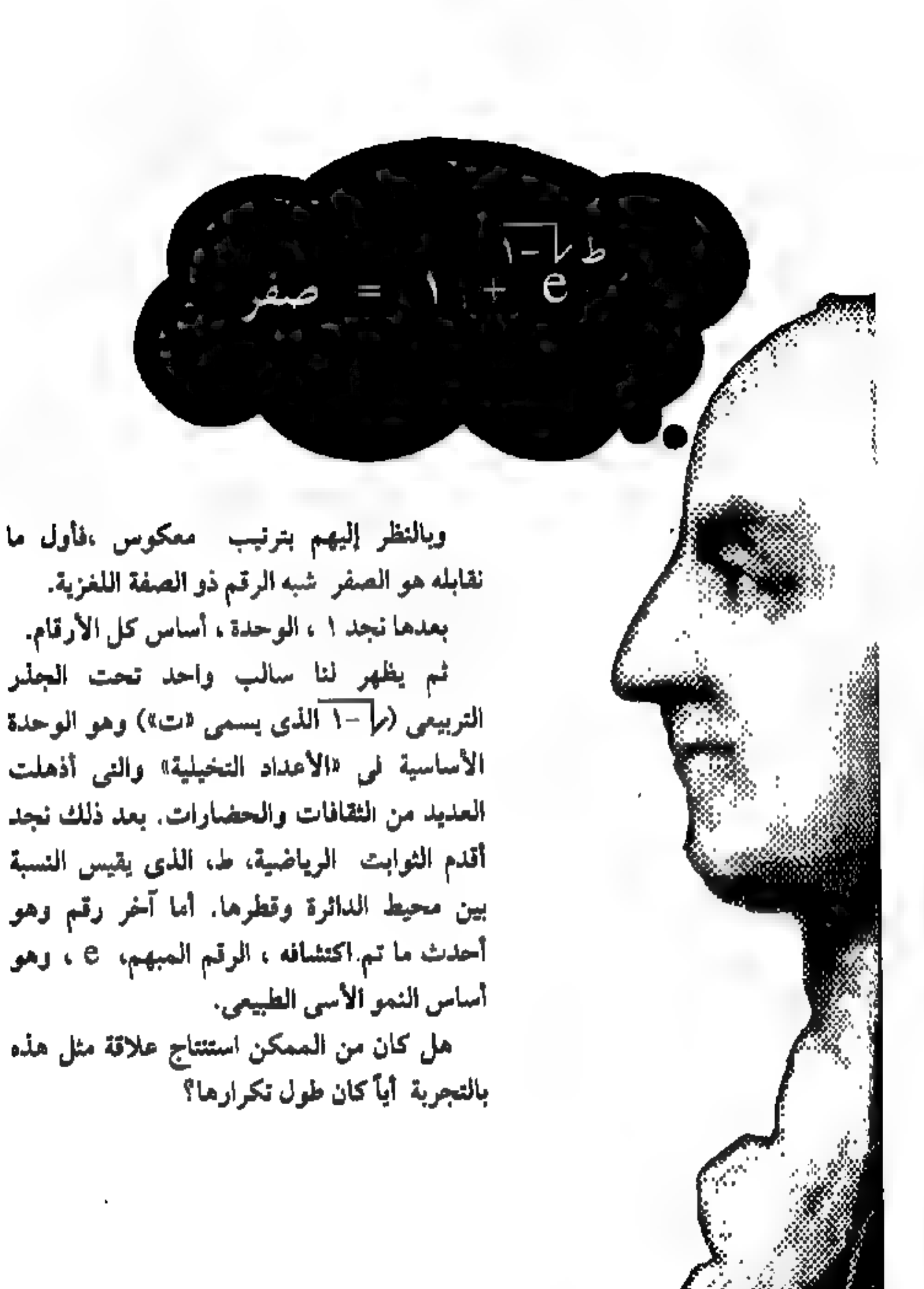


وقد صعق ديدروت وعاد إلى الأمان الذى حظى به فى منتديات باريس.

ولا تحتوى الصيغة التى ذكرت فى هذه القصة على شىء فى مضمونها، ولكن قام أويلر بتطوير معادلة من أجمل الصيغ فى الرياضيات كلها، والتى تجعل من يتعرض لها أن يتوقف أمامها ويفكر فيها بالتأكيد.

والصيغة التى وضعها أويلر هى تعبير لغزى مبهم والذى يقوم بربط الأرقام الخمسة الأساسية فى الكون.





وبالنظر إليهم بترتيب معكوس ،فأول ما نقابله هو الصفر شبه الرقم ذو الصفة اللغزية.

بعدها نجد ١ ، الوحدة ، أساس كل الأرقام.

ثم يظهر لنا سالب واحد تحت الجذر التربيعي ($\sqrt{-١}$ الذى يسمى «ت») وهو الوحدة الأساسية فى «الأعداد التخيلية» والتى أذهلت العديد من الثقافات والحضارات. بعد ذلك نجد أقدم الثوابت الرياضية، ط، الذى يقيس النسبة بين محيط الدائرة وقطرها. أما آخر رقم وهو أحدث ما تم اكتشافه ، الرقم المبهم، e ، وهو أساس النمو الأسى الطبيعى.

هل كان من الممكن استنتاج علاقة مثل هذه بالتجربة أياً كان طول تكرارها؟

وفى الواقع، فإن صيغة أويلر الرائعة جداً قد نتجت من دالة (قد اكتشفها هو) تربط بين الأعداد المركبة والدوال المثلثية التى اكتشفها علماء الرياضيات المسلمون (انظر صفحة ٩١).

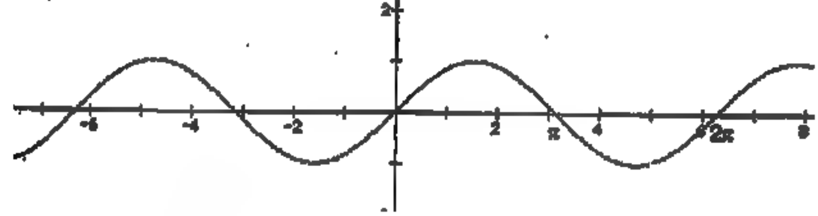
وقد لاحظنا أن الدالة $e^{س}$ لها منحنى يتزايد بسرعة كبيرة، وعلى العكس فإن $e^{\sqrt{-1}\,س}$ يمثل دائرة ! ونصف قطر هذه الدائرة هو الوحدة أما س فهى الزاوية التى يصنعها الخط الواصل من نقطة الأصل إلى أى نقطة. وتزداد قيمة س من صفر إلى ٢ ط مع تحرك النقطة على الدائرة. ولكن إذا نظرنا إلى هذه الصيغة من وجهة نظر حساب المثلثات نجد أن $e^{\sqrt{-1}\,س}$ هو عبارة عن عدد مركب الجزء «الحقيقى» فيه هو جتا س أما الجزء «التخيلى» فهو جا س.

+√-1
sin x
x
cos x
+1

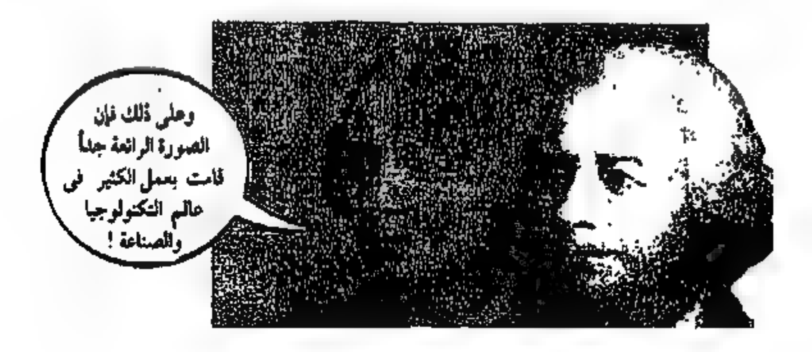
لذلك يمكننا كتابه $e^{ت\,س}$ = جتا س + ت جا س،حيث ت هو الرمز الشائع لـ $\sqrt{-1}$.

ماذا لو انحدرت النقطة على الدائرة مرة أخرى ، نجد أن الزاوية س تستمر فى الزيادة، هذا يعنى أن الدوال $e^{ت\,س}$ وجتا س وجا س تستمر فى تكرار نفسها. ويقال إن هذه الدوال دوال دورية . ويتم تمثيل منحنى ص = جا س على الصورة :

ويشابه هذا العديد من الظواهر التى إما أن تكون تبادلية بالنسبة للزمن مثل التيار الكهربى ، أو الموجات المنتشرة فى الفضاء مثل الصوت. ودوال الجيب وجيب التمام هى الوحدات



البنائية فى كل صور الموجات المعقدة التى تحمل رسائل ما. والقيام بالرياضيات بواسطة دوال الجيب أو جيب التمام عن طريق استخدام الصيغة «الأسية التخيلية» تقوم بتحويل الحسابات المرهقة إلى تمرينات مرتبة وسهلة.



علوم الهندسة اللا إقليدية

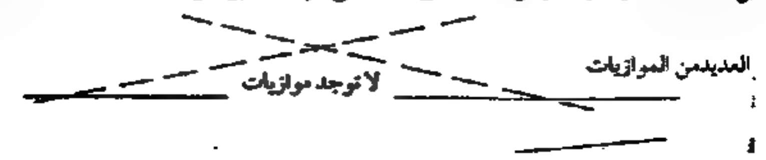
رأينا أن إقليدس استنتج كل هندسته من «ملاحظات شائعة» قليلة «وافتراضات» ذاتية الدلائل،ولكن واحدة من هذه الافتراضات والتى تختص بالخطوط المتوازية تبدو مشابهة للنظرية لدرجة كبيرة . وقد شكل نظام إقليدس هذا ارتباكاً على مر العصور غير أنه قابل شكوكاً فى صحته واكتماله.

وبعد ذلك أصبح هذا النظام أساساً لمرحلة عظيمة فى تاريخ التخيل الرياضى وهى ابتكار الهندسة اللاإقليدية .

وقد تم ابتداع هذه الهندسة بواسطة العديد من الأشخاص، ولكن أول من قام بذلك لم يكن يعرف أنه يسير فى اتجاه هذه الهندسة . كان هذا هو عالم الرياضيات المسيحى ج ساكتشيرى والذى نوى أن ينهى كل هذه المراوغات نهائياً. وقد حاول فى كتابه «تحرير كل العيوب بواسطة إقليدس» فى عام ١٧٣٣ أن يوضح أنه من المستحيل التعامل مع الهندسةبدون «فرض التوازى».



ولم يكن هناك أى شىء خطأ فى النتائج، وتم تكرارها فى وقت لاحق بواسطة المخترعين الحقيقيين الذين كانوا يعرفون ماذا يفعلون.
هناك العديد من الطرق التى يتم بها التعبير عن مبدأ التوازى.وبالنسبة لنا فتكون طريقة التعبير كالتالى : إذا أخذنا فى الاعتبار خطاً مستقيماً وكانت هناك نقطة خارجة عنه فإنه يوجد خط واحد وواحد فقط يمر بهذه النقطة ويوازى ذلك الخط فى نفس الوقت ، وإذا لم يتم قبول هذا التعريف تكون النتيجة : إما أن يكون لدينا أكثر من خط يحمل هذه الخاصية أو ألا يكون هناك أى خط على الإطلاق يوازى الخط الأول.



في البداية تم التحقق من فكرة العديد من الموازيات بواسطة كل من عالم الرياضيات المجرى جانوس بولاى (١٨٠٦ ـ ٦٠) وعالم الرياضيات الروسى نيقولاى لوبا شيفسكى (١٨٥٦ ـ ١٧٩٢)كل على حدة وفى ذات الوقت تقريباً .وبعد ذلك قام العالم الألمانى جورج ريمان (١٨٢٦ ـ ٦٦) بالتحقق من فكرة عدم وجود موازيات . وفى النهاية تم التحقق من أن هذا النوع من الهندسة من الممكن أن يتم بواسطة إنشاءات فى أنواع خاصة من الأسطح. فبالنسبة لهندسة ريمان تعتبر الكرة مثالاً جيداً إذا اعتبرنا أن الخط عبارة عن دائرة عظمى، وهو المنحنى على سطح الكرة الناشىء عن تقاطع مستو يمر بمركز الكرة مع سطحها. ويلاحظ أن أى دائرتين عظميين تتقاطعان فى نقطتين وعلى ذلك فلا يوجد أى موازيات.



والخط هو أقصرمسافة بين نقطتين .وقد اتضح أن هناك العديد من الموازيات ، وهى الخطوط التى لا تتلاقى أبداً مع ذلك الخط.

وقد وضح اعتياد الناس على علوم الهندسة اللاإقليدية ضعف المقولة بأن الرياضيات تخبرنا بالحقائق المنطقية . ولكن هذا التفكير التطورى أخذ وقتاً طويلاً لكى يتلاءم معه الناس.

الفضاءات نونية(*) الأبعاد

هناك تطور آخر معاكس للبديهة فى الهندسة وهو دراسة الفضاء الذى له أبعاد أكثر من ثلاثة . وامتداد نظام ديكارت للهندسة الجبرية بحيث يتم وضع أبعاد أكثر وضوحاً ومباشرة. فبدلاً من أن يتم التعبير عن موقع نقطة فى المستوى بواسطة الأبعاد (س،ص)يتم التعبير عنها فى هذه «الفضاءات الزائدة» بواسطة الأبعاد(س$_1$ ، س$_2$ ،....، س$_ن$). وبالطبع تختلف خصائص المنحنيات فى هذه الفضاءات الزائدة عن تلك المرسومة فى بعدين أو ثلاثة، ولكن الاعتقاد بوجود تلك الفضاءات متعددة الأبعاد لا يشكل أى صعوبة بالنسبة لنا فى هذه الأيام.



فى العصر الفيكتورى كان الأمر مختلفاً جداً.

(*) لها عدد ن من الأبعاد فى الغالب يكون أكثر من ثلاثة. (المترجم).

وتمت كتابة عمل جيد عن الخيال الرياضي والنقد الاجتماعي يهتم بهذه الفكرة وهو يسمى «الأرض المستوية Flatland» وهذا العمل يصف مجتمعاً من الأشخاص الفعليين الذين يعيشون في مستوى ، وهذا مشابه تماماً لفترة العصر الفيكتوري حيث كانت حالة الفرد الاجتماعية تعتمد على عدد«جوانب الشخص Person's sides» حيث كان للطبقة العليا أربعة جوانب وللأرستوقراطيين العديد والعمال ثلاثة، أما النساء فكانت لهم مجرد إبرة!

وكان «المربع»البطل الذى لديه خبرة بالأبعاد الثلاثة من خلال علاقة الصداقة التى تربطه بالكرة . وكان هذا الكائن يظهر لسكان هذه الأرض كل خمسمائة سنة على هيئة دائرة التى تبدأ من نقطة ثم تنمو ليزداد حجمها وبعد ذلك تتضاءل ثم تختفي. والذى لم يكن مفهوماً بالنسبة لقاطنى هذا المكان هوالكرة التى تمر عبر مستواهم .فهذه الكرة تصادف المربع وتأخذه فى رحلة عبر الفضاء وتعرض عليه الأرض الخطية والأرض النقطية الأهل بمخلوقات راضية نوعاً ما. وتقوم كذلك بإطلاعه على الحياة الخاصة لسكان الأرض المستوية. ويعانى المربع كثيراً فى رحلة عودته حيث إنه يحاول أن يصف الفضاء ولكنه يعجز عن توضيحه لأصدقائه ، الذين يظنون أنه منزعج.



إيفاريست جالوا

فى أثناء القرن التاسع عشر ازدادت قوة وعمومية الجبر، فقد أصبح متأصلاً فى شكليته وصياغته .وبالتدريج بدأت فكرة أن أنظمة الصياغة تستطيع أن تشير إلى أشياء أخرى غير الأرقام والعمليات الحسابية عليها. وقد تم اتخاذ خطوة للأمام فى هذا المجال بواسطة العالم الرياضى الفرنسى إيفاريست جالوا (١٨١١ ـ ٣٢) وهو بدون شك واحداً من أهم الشخصيات البارزة فى تاريخ علم الرياضيات. وقد كان واحداً من الجمهوريين الغيورين فى وقت فيه العديد من الصراعات السياسية. وقد كان ضحية عوامل الغضب الثورية ، وقد قتل فى ريعان شبابه وعمره ٢١سنة . وفى آخر ليلة قبل وفاته قام بكتابة مخطوطة تحتوى على كل أفكاره .و قد اختفت هذه المخطوطة فى البداية ثم بعد ذلك ظهرت ونُشرت بعد خمسة عشر عاماً من وفاته.

وقد قام جالوا بمناقشة مشكلة قديمة وهى إيجاد جذور المعادلة الخماسية س٥ +....= صفر .وفى وقته اجتمعت كل الآراء على استحالة هذه العملية ولكن لم يقم أحد بإثبات ذلك.



المجموعات



المجموعات هي تكوينات رياضية يتم تعريفها بواسطة عناصر وبعض قواعد الاندماج، ويمكن اعتبارهم أنهم أنظمة حسابات ولكن بدون أرقام، فلا توجد علاقة بين عناصر تلك المجموعات وبين القياس أو العد وكذلك فهي ليست أرقاماً بالمعنى الطبيعي للكلمة. وقد أوضح جالوا أن هناك تتابعاً من العمليات التي تسلك نفس سلوك الجمع.

وهذه التتابعات لها القليل من الخصائص التى تُعَرِفها.

١ـ لكل عنصرين يوجد عنصر ثالث ينتج من اندماجهم، مثل :٢+٢ =٤ .

٢ـ هناك عنصر يسمى بعنصر «الوحدة» وهو لا يغير العنصر الذى يندمج معه مثل : ٢+ ٠ =٢ .

٣ـ كل عنصر له «معكوس» والذى عندما يندمج معه ينتج عنصر الوحدة مثل ٢+(-٢)= صفر .



وكمثال لأحد المجموعات ، وهى أحد الأمثلة البسيطة جداً التى قدمها جالوا ، نأخذ فى الاعتبار الأربعة أشكال المسماة.

a b c d

وهذه ليست عناصر المجموعة ، ولكن عناصر المجموعة تتكون من عملية تدوير هذه الأشكال الأربعة. وإذا تخيلنا عملية تدوير بينهم إما عن طريق تدوير واحد فقط

مثل : b c d a

أو اثنان مثل: c d a b

أو ثلاثة مثل: d a b c



وإذا أسمينا عمليات التدوير هذه I,C,B,A فإن C+A يعتبر تدوير ٣+١ أماكن أو ٤ أماكن وهو مساوٍ لعنصر تدوير الوحدة I ! ومن الممكن أن تكون جدولاً لجمع هذه العناصر بكل الصّور.



	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

وبالرغم من أن هذا المثال تافه إلى حدٍّ ما إلا أنه يحتوى على فكرة فعالة ، وهى أن علماء الرياضيات من الممكن أن يلاحظوا أى نظام عمليات عن طريق «جدول الجمع» . ونحن لسنا بحاجة إلى أمثلة إما فى الحالة الفيزيائية مثل الحركة أو الجبرية مثل جذور المعادلات. وهذا الهيكل البنائى يقوم بتعريف نفسه ،ومثل هذه الهياكل البنائية والتى لا يلزم أن تكون مجموعات ومن الممكن أن نجد مجموعات اندماج أخرى وربما تظهر جداول لعملية الضرب أيضاً.

العمليات الجبرية على الفئات

بعد ذلك تمت دراسة أنواع أخرى من العمليات ، وأشهر تلك العمليات قام بتطويرها عالم الرياضيات البريطاني جورج بول (١٨١٥ـ ٦٤) . وقد سمح بول بتطبيق الطرق الرياضية لكينونات غير كمية مثل الافتراضات المنطقية.



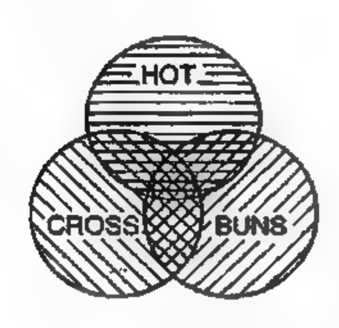
لنفترض أننا نبحث عن Hot Cross Buns فإننا نقوم بكتابة الكلمات الاسترشادية.

Hot Cross Buns

ويقوم محرك البحث بسؤالنا عما إذا كنا نريد المواقع التى بها

أي الكلمات الاسترشادية   أو   كل الكلمات الاسترشادية

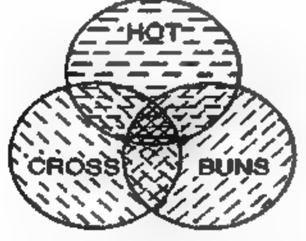
والاختيار الأول يعطينا كل المواقع التى تحتوى على Hot أو Cross أو Buns ويتم تمثيل ذلك بواسطة أشكال «فن» على الصورة :





ويعنى هذا بلغة الفئات (Hot) + (Cross) + (Buns) . وهذا يعنى أنه يولد الكثير من المواقع التى لها الكثير من الاهتمامات وهى ليست بالضرورة ذات صلة بما نريد.

ولكن إذا كنا نريد "Hot Cross Buns" فقط فهذا يعنى أننا سنحصل على المواقع التى نحتوى على كل من Hot و Cross وBuns ويصبح شكل فن فى هذه الحالة :



والذى يعنى بلغة الفئات (Hot) × (Cross) × (Buns) لذلك سنحصل على "Hot Cross Buns" ولا شيء غيرها.

حيث إن الحاسبات تتضمن العديد من عمليات الاختيار، وليس فقط الحسابات مع الأرقام.

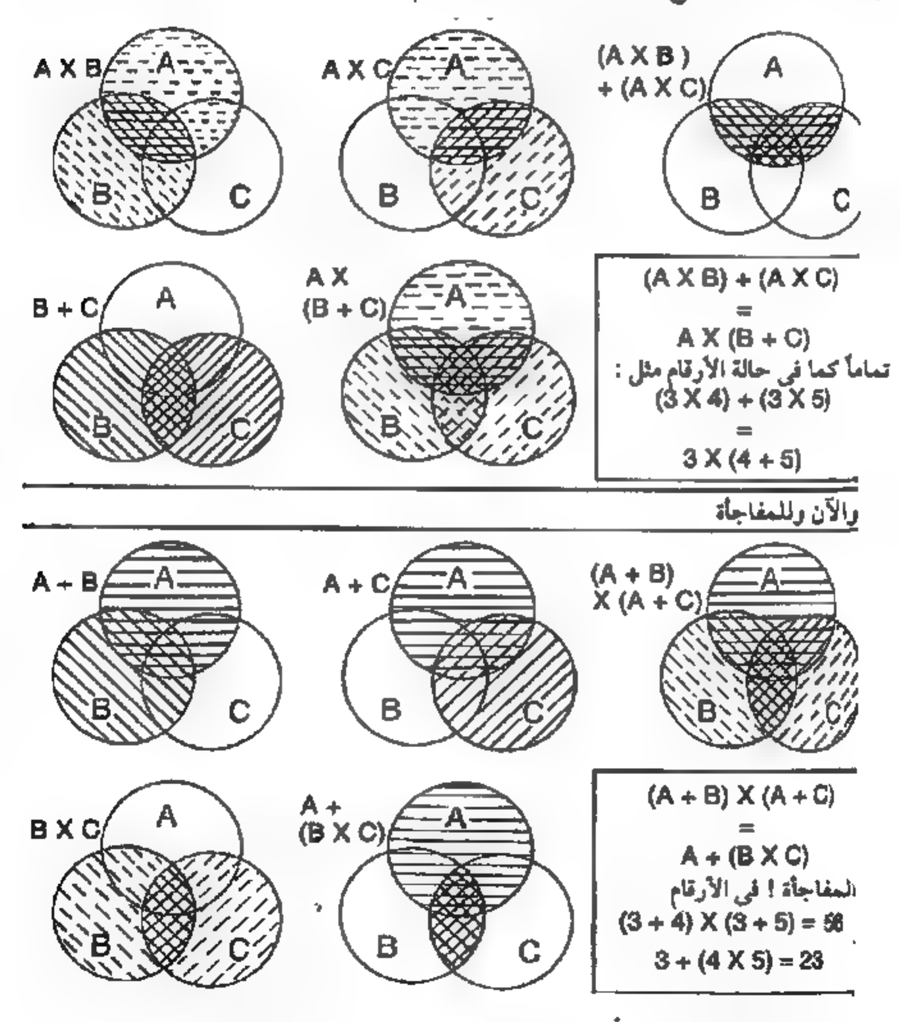
يسمى ذلك فى الفرنسية Ordinateurs

فإن العمليات الجبرية على الفئات تعتبر أساسية فى تصميمها

والعمليات الجبرية على الفئات شيقة جداً وذلك لأنها على عكس الحسابات تحتوى على نوعى علاقات «التوزيع».

C + A = (C XB) + A وكذلك C X A = (C+B) X A

والحالة الأولى تتماشى مع الحسابات العادية ولكن الثانية لا تتماشى أما فى حالة الفئات حيث تعنى "X" التقاطع و«+» اتحاد تتماشى كلتا الحالتين من خلال التوضيح المبين بواسطة «أشكال «فن» وما هو«قانون التوزيع» الذى يتحقق بالنسبة للأرقام.



ومثل هذه الأمثلة أعطت علماء الرياضيات مدى فهم عظيم لتخيلهم. فالحسابات التى يقوم بدراستها علماء الرياضيات أصبحت متزايدة فى اختلافها عما تعرفه عن الأرقام.



كانتور والفئات

بينما انشغل البعض بالأرقام كان البعض الآخر مهتماً باللانهائيات ،والفئات الموصوفة بكونها لانهائية في الحقيقة ثم تركها للرموز الرياضية واللغزية.

وقد توجه عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور (١٨٤٥ ـ ١٩١٨) إلى ترويض اللانهاية.

وضعت كيفية تكوين مثل تلك الفئات وقمت أيضاً بعدهم.

وقد وضع مخططاً لِعدّ الأرقام الكسرية عن طريق وضعهم في منظومة مثل هذه .

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	
1/3	2/3	3/3	4/3		
1/4	2/4	3/4			
1/5	2/5				
1/6					

وها هي القاعدة التي يتم من خلالها إحصاء كل الكسور .

لاحظ كيف تبدأ الأسهم ، في البداية من المربع في أعلى اليسار، ثم على طول القطر أسفل إلى اليسار ، من $\frac{٢}{١}$ ثم $\frac{٣}{١}$ وهكذا. وأثناء استمرارك لاحظ إذا كان هناك رقم قد تم عدّه بالفعل (مثل $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$) وقم بحذفه. أيضاً قم باختصار الكسور إلى أبسط صورة مثل $\frac{٢}{١}$ = ٢ .

هل هذا متأخر جداً للقيام بمراهنة خيول السباق؟

129



يتكون لدينا الآن هذا التابع

١، ٢، $\frac{١}{٢}$، ٣، $\frac{١}{٣}$، ٤، $\frac{٣}{٢}$، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{١}{٤}$، ٥، ....

ويبدو هذا وكأنك تقوم بتجميع الكسور التي يساوي مجموع بسطها ومقامها ٢ ثم ٣ ثم ٤ وهكذا على الترتيب وفي كل مرة تبدأ بأكبر رقم . وبهذه الطريقة سوف نصل إلى أي رقم كسراً كان أو صحيحاً إن عاجلاً أو آجلاً.

وبالمثل من الممكن أن نحصي الأرقام التي تحل المعادلات الجبرية مثل :

$\sqrt{٢}$ و $\sqrt{-١}$



وقد أثبتت أعمال كانتور عكس ما كان يقصد ، حيث إنه وجد أن الأعداد الحقيقية لا يمكن أن تُحصى. وقد قام بإثبات ذلك على عدد قليل من الخطوط ، ولكن عليك أن تراقب عن قرب !

افترض أننا قمنا بإحصاء كل الأرقام مثل الكسور والأرقام الجبرية، فإن هناك قائمة لا نهائية لهذه الأرقام مشابهة لما حصلنا عليه قبل ذلك للكسور والآن من الواضح أن الأرقام لا تظهر في ترتيب حسب جمعها..





كيف يمكننا إنشاء رقم غير موجود فى هذه القائمة ؟ حسناً افترض أن هناك رقماً ما مختلفاً فى الخانة الأولى مع الرقم الأول، وفى الخانة الثانية مع الرقم الثانى، والخانة الثالثة مع الثالث وهكذا . ويمكننا فعل ذلك إذا كانت كل خانة فى هذا الرقم تزداد بمقدار واحد عن خانة الرقم الموجود فى القائمة.

بالنسبة للقائمة التى قمنا بعملها نجد أن ....

الخانة الأولى : ٧ ـــ ٨
الخانة الثانية : ٢ ـــ ٣
الخانة الثالثة : ٩ ـــ ٠
الخانة الرابعة : ٨ ـــ ٩

وكما نستطيع أن نلاحظ فإن الأرقام التى وضعتها تأخذ الصورة العشوائية ، ومن الممكن أن تكون مختلفة تماماً ولا يغير ذلك من نقاشنا.

لذلك الرقم الجديد الذى من الممكن أن نسميه الغريب يأخذ الصورة غ= ٨٣٠٩٠٠٠ ,

وها هو أسلوب البحث

أين يوجد غ فى القائمة؟

ليس فى المكان الأول ولا الثانى ولا الثالث ولا أى مكان آخر !

لذلك فإن فرضنا أننا نستطيع أن نحصى كل الأعداد الحقيقية فرض خاطئ.


وقد تعامل كانتور مع نوعين من اللانهاية: الأرقام المعدودة
(مثل الأرقام العادية) والنقاط الواقعة على خط ما
تمكن من الحصول على طريقة لوصف الرتب الأعلى من اللانهاية بطريقة عامة.
وبالنسبة لهذه النقطة سنقوم بالإشارة لفكرة الفئة الجزئية. إذا كانت لدينا فئة مكونة من
ثلاثة عناصر c,b,a فإن فئاتها الجزئية هي الأزواج bc,ab, ac والعناصر الفردية
c,b,a والفئة الفارغة وكذلك الفئة الأصلية ذاتها.
abc a b c ab ac bc
وبحساب عدد هذه الفئات نجد أنه ثماني فئات أو ٢٣ وهذه الفئة الجديدة تسمى فئة
القوى (أو الأس) للفئة الأصلية. وإذا كانت الفئة الأصلية تحتوي على عدد n من العناصر
فإن فئة القوى تحتوي على ٢n عنصر.
وبهذه الطريقة استطاع كانتور أن يكون فئات كبيرة جدا عن طريق تكوين فئة القوى
لواحدة تلو الأخرى (أي يحسبها الواحدة ثم يحسب فئة القوى لفئة القوى وهكذا). وقد
وضع رمزاً جديداً لحجم هذه الفئات
و لكونه يهودياً فقد فضل استخدام
الحرف العبري القديم $\aleph$ (Aleph).
وعلى ذلك إذا كانت فئات
المعدودات لها حجم
فإن فئة القوى لها تكون
٢ $\aleph$ هكذا
وعلى الجانب الآخر فإن فئة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد وهي أول فئة معدودة هي $\aleph$
ربما يبدو مقبولاً أن نفرض أن ٢ $\aleph$ تساوي ١ $\aleph$ ولكن هذا الفرض أزعج علماء الرياضيات عبر الأجيال.

مستحيل



وإذا كنا نتحدث عن الفئات بهذه الصورة العامة ، فلا يوجد شيء يمنعنا من الإشارة إلى فئة كل الفئات والتي لها معنى لغوى ، أليس كذلك؟ وهذه الفئة لا بد أن تكون أكبر الفئات على الإطلاق ويتم تعريفها من خلال $\wp$ معينة ولتكن $\wp_F$. ولكن مثل أى فئة أخرى ما يوجد لهذه الفئة فئة قوى يعطى رقمها على الصورة ٢ $\wp_F$ ومن المؤكد أنه أكبر من $\wp_F$ لذلك ما قمنا بتعريفها على أنها أكبر الفئات على الإطلاق يتولد منها فئة أكبر ، وهذه الفكرة تحوى تناقضاً ذاتياً !



أزمة فى الرياضيات

قدَّم تناقض اللانهاية الذى تم اكتشافه بواسطة كانتور تحدياً جديداً لعلماء الرياضيات .وهذا لا يشابه التحديات الرياضية السابقة مثل $\sqrt{-١}$ أو $\frac{\text{ءس}}{\text{ءر}}$ ، ولكن على هذه الحالة يوجد تعارض ذاتي واضح. وقد تم إثبات أن هذه التناقضات لا تختلف في تفاصيلها عن الرياضيات الاصطلاحية.



وفى بداية القرن العشرين شرع مجموعة من الفلاسفة وعلماء الرياضيات فى حل هذه الأزمة ، وسألوا...


راتسيل والحقيقة الرياضية
كان بيرتراند راتسيل من بين من عكفوا على حل هذه الأزمة.
وقد عمل طويلاً في دراسة المنطق والفلسفة والتعليم التقدمي وفي النهاية التمرد والاحتجاج على الأسلحة النووية. وقد مثلت الرياضيات بالنسبة له الحقيقة المؤكدة الوحيدة في العالم في مواجهة الادعاءات الزائفة للرهبنة.
قمت أنا وكثير غيري بدراسة المتناقضات المنطقية لإيجاد حلول للأخطاء التي واجهت كانتور.
وكان هذا معروفاً بالفعل منذ أوقات اليونانيين القدماء، وقد اعتمد جزء منه على استخدام «كل» كما في «فئة كل الفئات».
إذا كانت الجملة بين القوسين صحيحة فإن مضمونها يقول أنها خطأ ....
لكن إذا كانت هذه الجملة خطأ فيصبح مضمونها أنها صحيحة!
وأجزاء أخرى تعتمد على الإشارات الضمنية مثل الجملة ...
«هذه الجملة خطأ»

وأحد أكثر المتناقضات براعة يختص بتسميتها . دعنا نقوم بتعريف B على أنه أقل عدد صحيح يمكن تسميته في ما لا يقل عن ١٩ مقطعاً.

باستخدام الطريقة العادية نجد أن هذا الرقم كبير جداً لأنه يحتاج تسعة عشر مقطعاً لتسميته : حيث إن الرقم «سبعمائة ألف مليون بليون» يحتاج فقط إلى عشرة مقاطع .



وهذا تناقض خطير جداً بالفعل حيث إنه لا يتضمن إشارة ضمنية ولا حتى يتميز بالشمول. وهذا يوضح مدى صعوبة إنقاذ الوثوق في الرياضيات عن طريق التخلص من أساسياتها المنطقية.





يتم وضع الإثبات في صورة سطور من الرموز المتصلة بعضها عن طريق بعض قواعد التحويل. وكان الهدف هو توضيح أن الإثباتات «المتحققة» يمكن تمييزها عن الإثباتات «غير المتحققة» ، وبذلك فإن أى جملة رياضية من الممكن أن تكون صحيحة أو خطأ.

نظرية "جوديل"

قام جوديل (١٩٠٦ ـ ٧٨) بنشر نظريته في عام ١٩٣١ كنتيجة لأعمال أ. ن. وايتهيد (١٨٦١ ـ ١٩٤٧) وكذلك كتاب راشيل المكون من ثلاثة أجزاء عن المنطق الرمزي في الفترة (١٩١٠ ـ ١٣) Principia Mathematica



وكانت طريقة جوديل تتمثل في : قام بتخصيص رقم محدد لكل جزء في الجمل الرياضية ، بعد ذلك قام بدمج هذه الأرقام ليحصل على رقم واحد لكل جملة رياضية . وعن طريق مناقشة مشابهة لمناقشة كانتور قام جوديل بتوليد رقم «عملاق» يعبر عن هذه الجملة . وكان هذا الرقم مليئاً بالمعاني
ولكنه لم يتم إثبات صحته أو بطلانه.



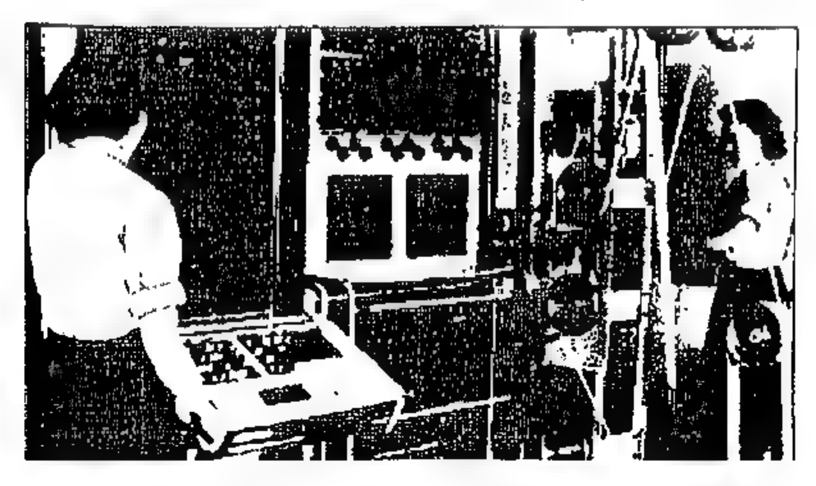
ماكينة "تورينج"

انبثقت من نظرية التحطيم العظيم لجوديل أنواع مختلفة من القوى . وقد التقط ألان تورينج (١٩١٢ ـ ٥٤) فكرة توليد جمل رياضية بطريقة مختصرة تماماً.

وتتكون ماكينة تورين من شريط وبرنامج يستجيب للمعلومات المتتابعة المخزونة في مقاطع مختلفة من هذا الشريط وهي تقوم بكل العمليات الابتدائية. وبلغة تكنولوجيا الثلاثينات من القرن الماضي لم يكن لهذه الآلة استخدام عملي ولكنها أمدت تورينج بإصدار من طريقة جوديل التي كان يحتاج إليها في بحثه. وفي القريب العاجل أصبحت تخيلات تورينج عملية جداً حيث إنها أصبحت دليل تطوير الحاسبات في أثناء الحرب العالمية الثانية .

وقد بدأت الحاسبات على صورة آلات حاسبة ضخمة يتم تشغيل البرنامج عن طريق الضغط على أزرار ومفاتيح من الخارج . وكان التطور الهائل عندما تم تحميل البرنامج داخل الحاسب على أنه أحد ملفاته البنائية والذي يقوم بتوجيه العمليات في كل الملفات الأخرى .ولا توجد الآن حدود لتعقيدات وقابلية تكيف الحاسب.

أصبحت لدى مميزات الحاسب، الذي يختلف اختلافاً تاماً عن الآلات الحاسبة الميكانيكية.

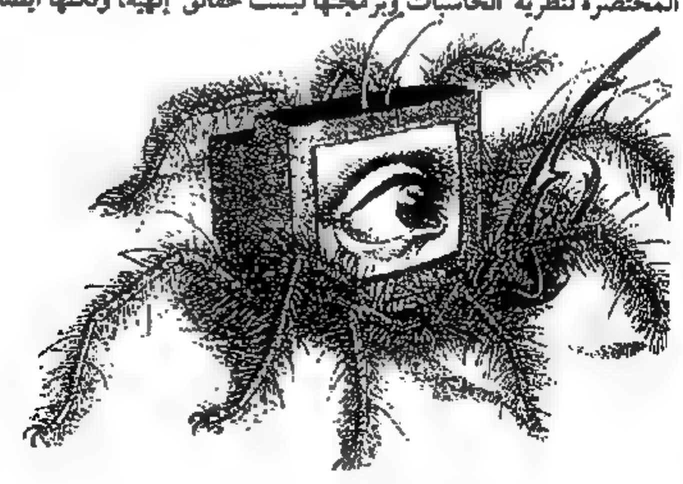


وقد ساعد تورينج فى كسب الحرب العالمية الثانية حيث إنه كان ضمن الفريق الذى كسر شفرة «اللغز» الألمانى ماكينة الشفرة .

وقد مات تورينج بصورة مأساوية وبالتحديد كنتيجة لاضطهاده ومحاكمته وقد تم تسميمه بسم السيانايد حيث وجدت بجانبه التفاحة المسممة مأكول منها قضمة.



وقد بدت رؤية تورينج للكمبيوتر المختصر أنها فادحة خاصة على المدى الطويل. ففى مخططه للعمليات البسيطة لم يكن هناك مكان خصص لبرمجة الأخطاء أو الحاجة «لمعالجة الأخطاء» . وقد دام الاعتقاد بأن الحاسبات لاتخطىء لمدة قرون، بمعنى أن أى خطأ هو نتيجة لأخطاء البشر. والآن فقط وبعد اكتشاف Millennium Bug بدأنا نتحقق الأنظمة المختصرة لنظرية الحاسبات وبرمجتها ليست حقائق إلهية، ولكنها أيضاً منتجات بشرية.




الفراكتالات
نظهر الآن قوة الكمبيوتر في الرياضيات نفسها، حيث قادنا الرسم بالكمبيوتر إلى نوع جديد من الهندسة يعرف بـ هندسة الفراكتالات والتي يتكون من أنواع خاصة من الأشكال غير المنتظمة المتشابهة في ذاتها، بمعنى أن أي نظام جزئي من نظام الفراكتال يكون مكافئاً للنظام ككل.
الفراكتالات
هي إنشاءات جميلة جداً
وعلى درجة عالية من
التعقيد. وأيضاً بسيطة جداً
تعتبر الفراكتالات
معقدة نتيجة التفاصيل
اللانهائية التي تحتويها
والخصائص الرياضية المتفردة
لا يوجد فراكتالات متماثلات أبداً
وتعتبر بسيطة لأنها تنتج بواسطة عملية بسيطة جداً
وإذا بدأنا بمعادلة بسيطة مثل س٢ +ص حيث إن س رقم مركب يسمح له بالتغير بينما ص رقم مركب ثابت . نقوم بوضع قيمتين (س، ص) ونبلغ الحاسب بوضع الناتج محل س في الخطوة التالية ثم يكرر ذلك في الخطوات المتتابعة . وتكون النتيجة مذهلة.

وقد وصف بينوا ماندلبرو (المولود عام ١٩٢٤) عالم الرياضيات الفرنسى (البولندى الأصل) مكتشف الفراكتلات على أنها طريقة لرؤية اللانهاية.



وفى هذه الأيام تستخدم الفراكتلات فى وصف الظواهر المعقدة مثل اضطرابات توزيع الزلازل وتطور المدن . وقد أدت هندسة الفراكتلات إلى الفرع الرياضى الجديد نظرية العماء.

نظرية العماء



تقوم نظرية العماء بوصف ظواهر ليست عشوائية ولا يمكن التنبؤ بها وفى نفس الوقت فهى تُوصَف بواسطة المعادلات التفاضلية.
وينتج هذا السلوك لأن أى تغيير بسيط فى الشروط الابتدائية يؤدى إلى تغير كبير جداً فى سلوك الحلول النهائية . والوصف التقليدى (المبالغ فيه حقيقة) لهذه الخاصية.
هو ...

والسلوك العمائي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بخصائص فراكتال الأنظمة وحيث إنها "ذاتية التماثل" فإننا نرى نفس نوع التغير إذا غيرنا المقياس الذى نصف به سلوك النظام . وقد وضح أن المتغيرات العشوائية - مثل تغير الأسعار فى أسواق الجملة - تسلك نفس هذا السلوك . وهذا يمكننا من استخدام نظرية العماء فى إدارة مثل هذا النوع من المشاكل.



كانت أول مرة تنهار فيها الثقة فى الرياضيات عند اكتشاف متناقضات اللانهاية فى بداية القرن العشرين حيث كانت هناك «أزمة فى الأساسيات».
وفى هذه المرة فإن التعارض يتعلق بالتقدم ، وبهذه الطريقة فإننا نلاحظ التغير المستمر فى الموضوعات التى تختص الرياضيات بدراستها.
ربما يعتبر أعظم الإسهامات الهامة لنظرية العماء فى فهمنا للرياضيات هى أنها جعلت التجاهل على قدر من الاحترام.
حيث إنها أمدت علماء الرياضيات بمسائل لحلها والتى تهتم باستحالة المعرفة المفصلة.

الطبولوجى

تظهر الآن قوة الحاسبات فى مجالات أخرى ملحوظة أكثر، فقد قامت الحاسبات بالبراهين التى وقف أمامها العقل البشرى عاجزاً . وأكثر الحالات الشهيرة المعاصرة هى الطبولوجى . يهتم علم الطبولوجى بدراسة العلاقات بين التكوينات بغض النظر عن أشكالها . وبصيغة رياضية فإن هذا المجال هو المجال الرياضى الذى يسهل فيه ذكر المشكلة ولكن يصعب جداً حلها.

وواحدة من أصعب التحديات فى مشاكل الطبولوجى هى «نظرية الألوان الأربعة» والتى تنص على أن أى خريطة يمكن تلوينها بواسطة أربعة ألوان على الأكثر . والقاعدة الوحيدة هى عدم تشارك دولتين متجاورتين فى نفس اللون. والتقييد الوحيد هنا هو أن كل دولة تكون عبارة عن قطعة منفردة ومتصلة من الأرض ولايوجد أى دولة تحتوى على دولة بداخلها على هيئة جزيرة كما فى حالة إيطاليا وسويسرا بالقرب من لوجانو Lugano



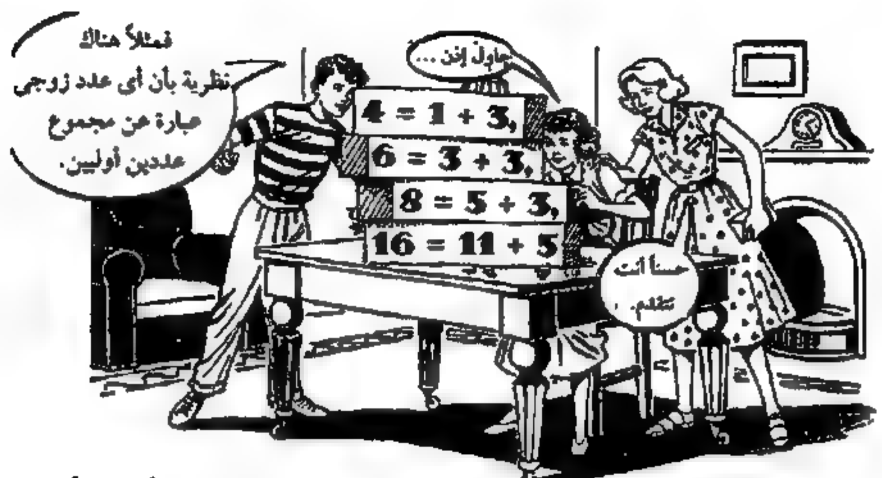


وقد تم التوصل إلى إثبات فى عام ١٩٧٦ ، ولكنه اعتمد على دراسة مفصلة لأكثر من ألف حالة وهى شىء خارج حدود استطاعة الإنسان. لذلك فقد تم تصميم برنامج كمبيوتر لاختبار الحالات الخاصة فى وقتها وقد نجح فى ذلك وأعطى النتائج المرجوة.

ولكن فى ذلك الوقت اشتكى بعض علماء الرياضيات من أنهم لا يستطيعون اختبار الإثبات ! حيث إن برنامج الكمبيوتر عبارة عن مجموعة من الأوامر وليس جملاً متصلة منطقياً . هل نستطيع أن نجزم بأن برنامجاً ما قد تمت معالجته من الأخطاء أكثر من برنامج آخر ؟ وفى الحال تم التوصل إلى إجماع على مفاده وأصبح الإثبات الآن «متحققاً»

نظرية الأرقام

وكما فى حالة الطبولوجى فإن المشاكل فى نظرية الأعداد سهلة الوصف ولكنها صعبة الحل .



إثبات ذلك لكل الأعداد الزوجية يعتبر عملية صعبة جداً . وكان هذا تحدياً حقيقياً لعلماء الرياضيات لفترة طويلة. وأول محاولة ناجحة لحل هذه المشكلة والمعروفة . بـحدس جولد باخ" بينت أننا لسنا بحاجة لأكثر من ٤٠٠٠٠٠ عدد أولى !



وأشهر نظرية في هذا المجال هي التي وضعها عالم الرياضيات الفرنسى بيير دى فيرما (١٦٠١ ـ ٦٥).



$$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$$

حيث أ وب و حـ أعداد صحيحة وإنشاء مثل هذه الثلاثيات كان معروفاً لمدة قرون مضت..

وقد رأينا أن علماء الرياضيات المسلمين فكروا فى معادلات شبيهة ولكن بأس أعلى. وقد حاول بعضهم إثبات استحالة وجود مثال لأرقام تحقق المعادلة: $س^{٣} + ص^{٣} = ع^{٣}$.

ولكن بيير دى فيرما اعتقد أنه قد توصل إلى مثل تلك المجموعات متصوراً أنه قد أثبت أن المعادلة $س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن}$.

ليس لها حلول على صورة أعداد صحيحة إذا كانت ن أكبر من اثنين.

وقد كتب لأحد أصدقائه أنه قد توصل إلى إثبات دقيق لهذه النقطة ولكن هامش الخطاب لم يستوعبه ! لذلك فإنه قد بدأ مطاردة استمرت لقرون ولم تنته إلا حديثاً. وقد تم التوصل إلى هذا الإثبات بواسطة عالم الرياضيات الإنجليزى أندروويلز (المولود عام ١٩٥٣) الذى يقوم بالتدريس الآن فى جامعة برينستون.

تضمن هذا
الرياضيات العميقة
المبهمة عبر آلاف السطور
التي تحتوى على مئات
الحسابات والاتصالات
المنطقية.

ويؤدى كل هذا إلى توضيح أن العقل البشرى يستطيع أن يتوصل إلى ما لا يستطيع الكمبيوتر التوصل إليه.

وقد أصبحت نظرية الأعداد واحدة من أقل فروع الرياضيات قابلية للتطبيق. ولكن أثناء تطور المجالات المختلفة فإن هناك تفاعلات بينها بطرق غير متوقعة.



ولكنه أصبح فجأة على درجة عالية من الأهمية التجارية والتكنولوجية والسياسية في تأمين الرسالات عبر الانترنت والذي يعتمد كلياً على صعوبة كسر شفرتها.

وأفضل طريقة لعمل الشفرات هو استخدام أرقام كبيرة جداً لا يمكن حساب مكوناتها. وعملية تعريف هذه الأرقام ووضع طرق لإنشائها وكسرها تتضمن العمل بنظرية الأعداد والمجموعات. لذلك فإن أكثر العلوم ميلاً لأن تكون نظرية أصبحت الآن في لب التطبيق العملي . وقد أصبحت هذه المشكلة على درجة عالية من السياسة حيث إن الحكومات تهتم بحل شفرات الرسائل المتبادلة بين المجرمين والإرهابيين.

الإحصاء

علم الإحصاء هو أكثر نقاط الرياضيات شيوعاً واتصالاً بالأفراد العاديين. ويعنى علم الإحصاء «فن الحكم» حيث إن الحكومات تستطيع أن تقوم بأعمالها على وجه حسن إذا تمكنت من جمع معلومات عما يدور في مملكتهم .ولكن مجرد جمع أرقام متضاخمة ليس بالعمل الكافي إنما يجب أن نقوم بربط وتحليل وتلخيص هذه الأرقام حتى تصبح مفيدة.

وفي هذا العمل ستقوم باستخدام كل المقاييس المختلفة للإحصاء مثل «المتوسط» ولكن مثل هذه المقاييس تعتبر ممثلاً لمجموعة من الأرقام وبينما تقوم بتوضيح بعض الأرقام في وقت ما فهي أيضاً تقوم بإخفاء مظاهر البعض الآخر . ولمعرفة كيفية تطبيق الإحصاء دعنا نتخيل قرية بها :

مائة قروى يتكسبون ١٠٠ دولار في السنة

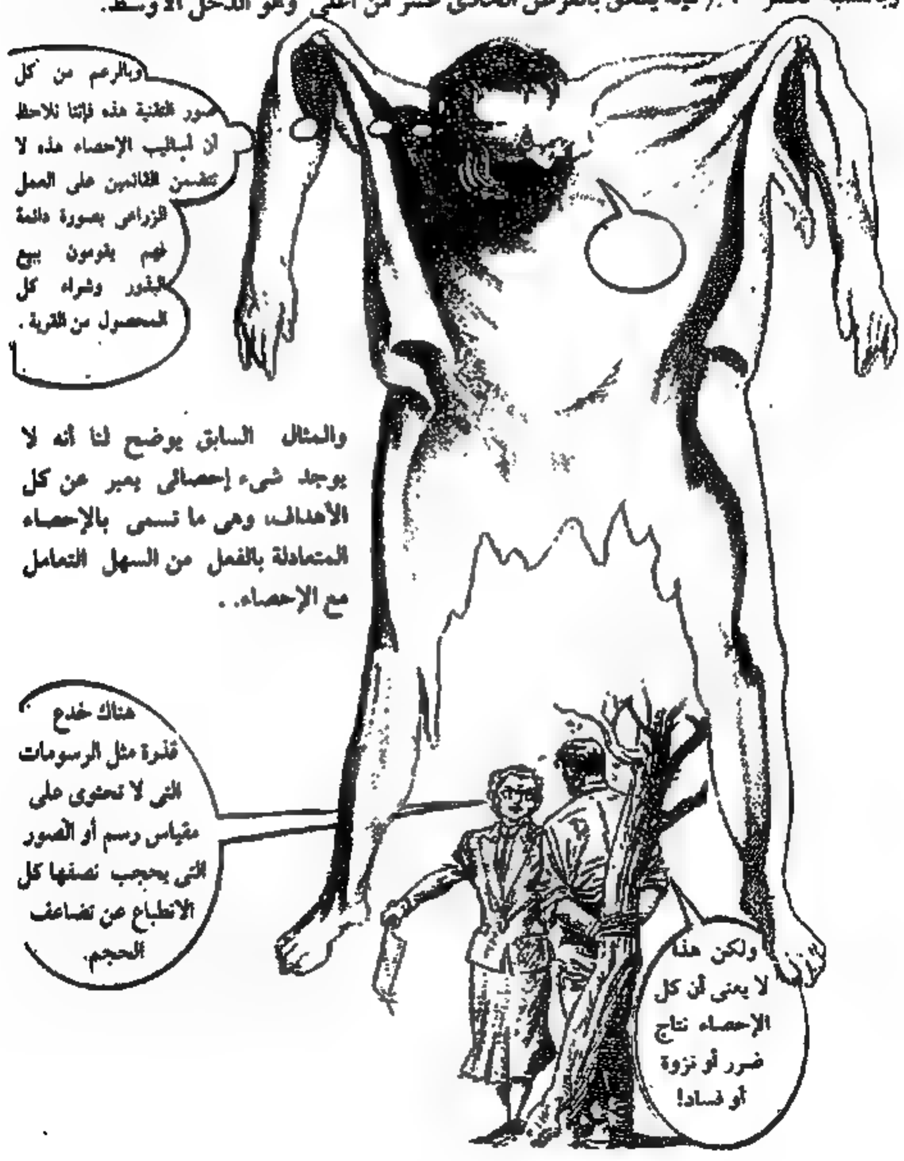
وعشرة مزارعين يتكسبون ١٠٠٠ دولار في السنة

بالإضافة إلى سيد القرية الذى يجنى ١٠٠٠٠ دولار في السنة.



والدخل الكلي لهذه القرية يصبح ٣٠٠٠٠ دولار ، وإذا قسمناه على ١١١ فرداً ، فإنه يعطى ٢٧٠ دولاراً في السنة لأغلب الحالات.

وإذا أخذنا في اعتبارنا الدخل المتوسط (حيث يوجد ٥٪ فقط لهم دخل أكبر) أو الأسلوب السائد (وهو الدخل الذي يتكسبه معظم الناس). وفي كلتا الحالتين سيكون ذلك ١٠٠ دولار فقط أي أنه يتجاهل دخل الأشخاص الأكثر ثراءً. ولكي نقوم بتوضيح صورة الدخل على نحو أفضل فربما نتجاهل الأعشار العليا أو السفلى (مستوى ١٠٪ و ٩٠٪) وبالنسبة لعشر ٩٠٪ فإنه يلحق بالفرض الحادي عشر من أعلى وهو الدخل الأوسط.



والمثال السابق يوضح لنا أنه لا يوجد شيء إحصائي يعبر عن كل الأهداف، وهي ما تسمى بالإحصاء المتعادلة بالفعل من السهل التعامل مع الإحصاء..

قيم "أ"

فى كل اختبارات الإحصاء يوجد رقم يتم الاستشهاد به يسمى «حد الثقة» أو «قيمة أ» وهو يأخذ قيم ٥٪ أو ١٪ أو أى قيمة أخرى . وهذا الرقم يحدد درجة التأكد من أن هذا الاختبار يتوافق مع مجموعة الأرقام التى يتعامل معها. وهذا الرقم يعبر عن الأرقام الشاذة التى تعطى نتائج إيجابية ولكنها خاطئة . ولايوجد اختبار يعطى نتائج مثالية ! فكلما ازدادت درجة التأكد زادت تكلفة هذا الاختبار وهذا يعنى أنه يتعين على القائمين على اختبارها أن يتقبلوا كل أنواع الخطأ الممكنة.



ذلك يعني أن هناك إقراراً بأن قيم أ يتم تصميمها بحيث إنها تحد من فرصة النتائج الإيجابية الخاطئة . وكلما زادت صرامة قيمة أ ازدادت اختيارية الاختبار ولكن على الجانب الآخر فإنها تجعله أقل حساسية . ففي مثال اختبار سمية بعض الملوثات البيئية فإن قيمة أ التي تُقدر بـ ٩٥٪ تجنبنا الإنذارات الخاطئة للملوثات ولكنها في نفس الوقت تجعلنا أكثر عرضة للأضرار الكاذبة . لذلك فإنه يتعين علينا أن نسأل أنفسنا أثناء القيام ببعض الاختبارات الواجبة : هل بعض المواد بالفعل لها آثار ضارة أم أن الآثار المنذرة يجب قبولها على أية حال؟ وفي كلتا الحالتين يجب اتخاذ إجراء وقائي. والسؤال المحتوم في هذه الحالة هو : لمصلحة من تتم هذه الاختبارات؟

وحتى في الاستخدامات الأبسط للإحصاء كما في عملية تمثيل المعلومات التجريبية فإنه يتعذر علينا الحكم على القيم. بالطبع لا تتلازم كل النقاط مع المنحنى المرسوم وإلا إذا كانوا قريبين جداً فهذا يعني أنها قيم ملفقة . وكذلك هناك بعض القيم تبتعد تماماً عن باقي الحشد ونسمي هذه القيم "Out liers" وإذا تم إدراجهم مع القيم فسوف يؤثرون بالسلب لذلك فيجب تجنبهم بعد التأكد من أنهم لا ينتمون إلى هذه الفئة (ربما نتيجة خطأ ما في القياس).



الاحتمال

تُبنى طرق التعامل مع البيانات الإحصائية بصورة أساسية على نظرية الاحتمال . ويتضمن هذا ثلاثة مبادىء واضحة والتى تتداخل مع بعضها بصورة متكررة.



هناك ست طرق من إجمالى ست وثلاثين يكون المجموع فيها سبعة)

أما الثانية فهى الاحتمالية المعملية للأشخاص الذين يعمّرون أكثر من خمسة وسبعين عاماً والتى تبنى على معلومات قد تم جمعها فى وقت سابق.

وفى النهاية نجد «أحكام» الاحتمال مثل احتمالية فوز أفراد غريبة فى سباق الخيل أو الانتخابات العامة .

وبالرغم من أن هذه الاحتمالات واضحة من ناحية المفهوم إلا أنها شائعة الاستخدام مع بعضها دون تفريق واضح. لكل هذه الأسباب فإن الاستنتاجات الإحصائية تقع فى العديد من المآزق.



وفجأة ارتبك الأصدقاء ، فهي كانت تعرف أن القطعة الغير الموجهة تعطى احتمالات هندسية متساوية للصورة والكتابة . لذلك فإنه على المدى الطويل تميل القطعة المعدنية غير الموجهة لأن تظهر أعداداً متساوية من الصور والكتابة . ومن الممكن إثبات ذلك بالتجريب . ولكي نقوم بعمل حكم على ما إذا كانت القطعة موجهة أو لا، فهذه قصة أخرى.

تتطلب الأحكام ، على «توجيه» قطعة النقود، النظرية الرياضية للاحتمال والإحصاء . وفي هذه الحالة سيصاحب الافتراضات عن سلوك قطعة النقود تصميم تجريبي بالإضافة إلى تقييم مقادير الخطأ ووضع حدود يقينية للأحكام النهائية. ويقودنا تحليل إلقاء قطعة النقود بعد توضيحه إلى مجموعة من النتائج الخطيرة . فبينما تبدو صيغة السؤال المباشر أنها نص بسيط للاحتمال (الصور والكتابة لهم احتمالات متساوية في القطعة غير الموجهة) ، فالصيغة العكسية (هل القطعة موجهة؟) تتضمن أحكاماً مدغمة بواسطة علم الإحصاء.



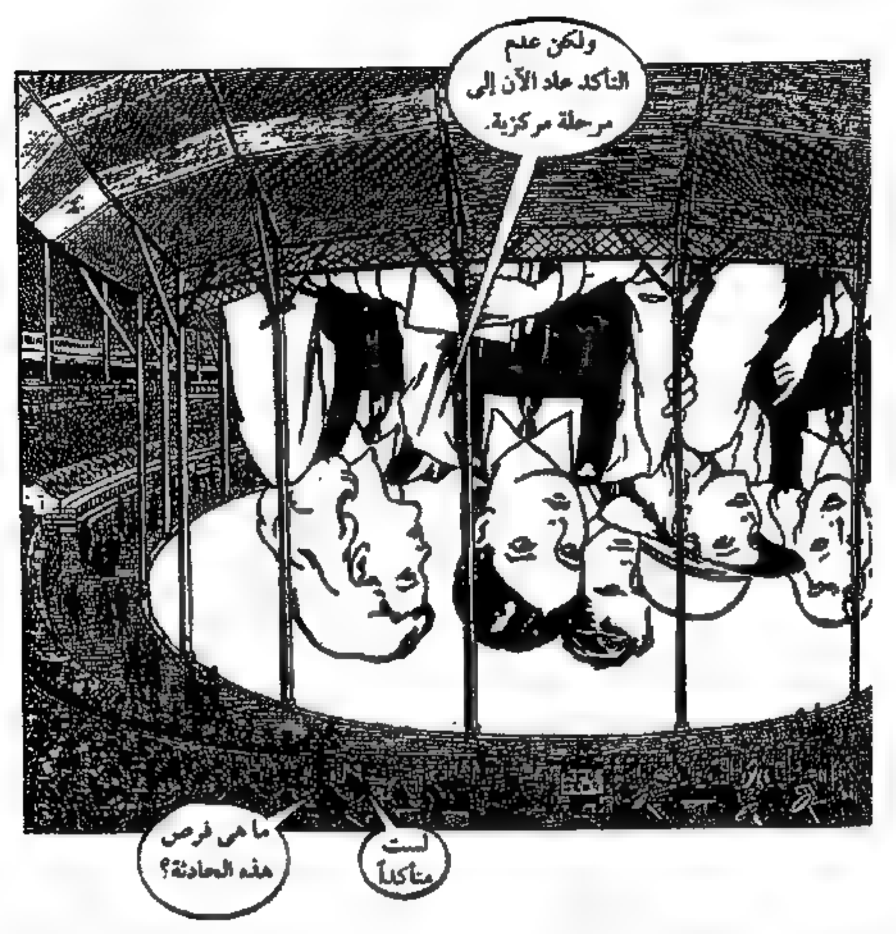
عدم التأكد

يقع هؤلاء المختصون بإمداد الأرقام سواء إذا كانت إلى السياسيين أو إلى عامة الشعب في ورطة كبيرة ، فإذا قاموا بتوضيح عدم التأكد والتحفظات حول أرقام معينة لن يكون ذلك مفهوماً.

وعلى الجانب الآخر إذا قاموا بتبسيط العملية وذكروا «أرقاماً ساحرة» على قدر أمان كبير فسوف يدعى الناس عليهم بالخداع.



ويكمن التحدى العظيم للرياضيات من الناحية الاجتماعية فى إدارة وتنظيم عدم التأكد.ولقد ساد الاعتقاد لفترة طويلة بأن تقدم العلوم الطبيعية من الممكن أن يقلل أهمية عدم التأكد والتى ظلت لها إمكانية الترويض بواسطة نظريةالاحتمال.



وقد قام عدم التأكد بقهر الرياضيات، وعلى الجانب الآخر فهو أساس لـ «نظرية الكم» فى الفيزياء .. وفى هذه الأيام علينا أن نتحدى آثار الحضارة الصناعية على البيئة الطبيعية.

وقد أصبح عدم التأكد فى المقدمة لأول مرة. وتعتبر تسمية أخرى جديدة فى الرياضيات بـ «النكبة Catastaophe» أو «العماء Chaos» غير مدهشة .والآن نستطيع أن نضع عدم التأكد ضمن أفكارنا التى توضح ما تتضمنه الرياضيات.

الأرقام السياسية

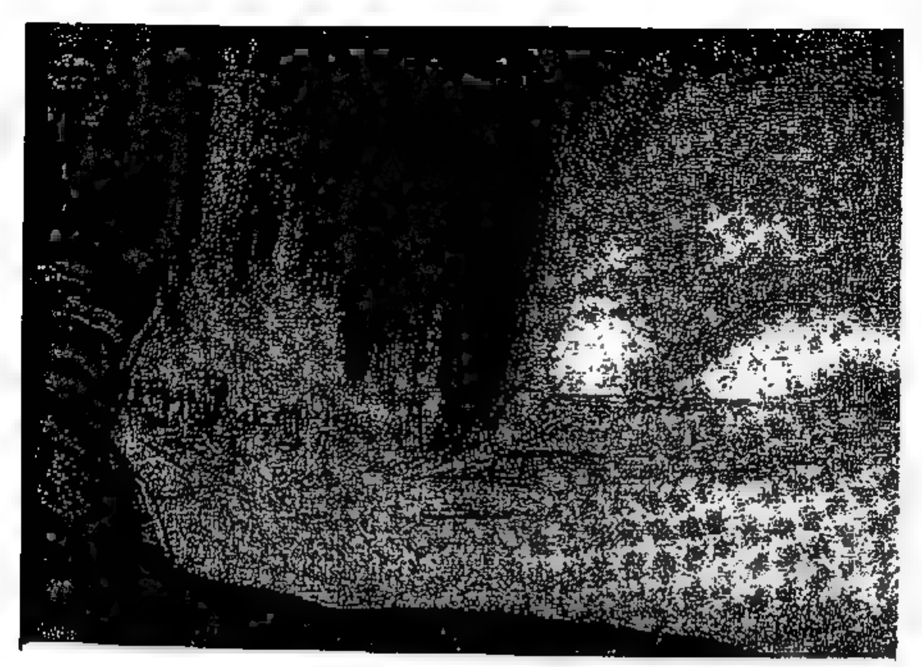
يعتبر فهمنا للأرقام (والتى تم وضعها للعد والحساب) غير ملائم بالنسبة للأرقام المستخدمة فى صنع السياسة .هذه الاستخدامات تتطلب مفهوماً ومهارات مختلفة . وبسبب اعتيادنا الدائم على كون الرياضيات دقيقة وصحيحة ، فإننا لا نميل إلى تصديق أن عدم التأكد يعتبر جزء من الأرقام السياسية. وقد أدى الذكر الدقيق للأرقام فى وسائل الإعلام إلى إيقاع عدم التأكد فى أزمة كبيرة. وعلى كل حال فإذا ذكرنا رقماً ما مكوناً من خانتين مثل ٤٧ فإننا نعرف أنه مختلف عن ٤٦ ،٤٨ أو أننا نعرفه بدقة حوالى ٢ ٪ .



وتعتمد تأثيرات الأرقام الملحوظة على صنع السياسة على محتوى تلك الأرقام. وهناك حوار في الكتاب المقدس تم فيه عرض تعقيد مذهل، في جينسي ١٨ ، كان أبراهام والسيد قبل مدينتي «سدوم» و«جمورة» وقال السيد ..



وعلى ذلك فقد نقل أبراهام النقاش إلى مستوى آخر، فهو الآن ليس عن السياسة (العفو عن المدينة إذا كانت هناك أرواح صالحة) ولكنه عن التحقيق (ماذا يحدث لو أننا أقل من النسبة؟) في هذا النص نجد أن خمسين ليس عدداً ولكنه رقم سياسي يتضمن تفاوتاً ما.وقد كان رأى أبراهام أن ٤٥ يقع داخل هذا التفاوت . هل بالتأكيد سيقوم السيد بتدمير المدينة لنقص خمسة، والتى ظهر من النص أنها أقل من حد الملاحظة ؟ وفى النهاية استسلم السيد، وذلك ربما لأنه لاحظ مهارة خصمه، وجعل الحصة تقل إلى عشرة أرواح صالحة. وبحكمة لم يقم أبراهام بأى مساومات أخرى.



وتوضح قصة «إنقاذ سدوم» أن الأرقام يمكن أن يكون لها معانٍ كثيرة مختلفة في النقاش . فترتبط «خمسون» بالتقدير أما «خمسة» أو «خمسة وأربعون» فترتبط بتفاوت هذا التقدير. ويعتمد الاختلاف بين «خمسين» و«خمسة وأربعين» على النص. وربما تتم ملاحظة هذا الفرق (إذا كان خارج التفاوت) في أوقات ما ولا يُلاحظ في أوقات أخرى. وبالرغم من أن المثال كان عن الأرقام السياسية ولكن نقطة أن المعنى يعتمد على النص تتحقق في كل التقديرات والقياسات.

ويمكن ملاحظة نفس الظاهرة في «تناقض المفتاح» عندما يستخدم شخص مفتاحاً جديداً لقفل ما فإنه يكون متوافقاً معه، وإذا قام أحدهم بعمل نسخة منه فإن هذه النسخة تتوافق أيضاً مع القفل لأن سماحية الآلة كانت قريبة من سماحية القفل. ولكننا نلاحظ أنه بعد تكرار النسخ من النسخ تتابعياً فإن النسخة الأخيرة لا تتوافق مع القفل وذلك لأنه تم تراكم سماحيات الآلة في كل مرة. وبدلالة القياس نجد أن C=B=A ......=K ولكن K=A . ويبدو هذا جنوناً بدلالة الحسابات العادية ولكنه يوضح أن الأرقام في حالة القياس والتقدير يكون لها معنى فقط بناءاً على محتوى النص ولا تعني نفس المعنى في حالة العد البسيط.



الرياضيات والمركزية الأوروبية

لقد لعبت الرياضيات الأوروبية دوراً هاماً فى الوعى الذاتى لأوروبا أى الإحساس بأن الثقافة الأوروبية هى الأعظم وأنها هى الحقيقة الوحيدة .و يرى الناس الذين يعتقدون أن الرياضيات عالمية أنه من الصعب أن تكون الرياضيات والإمبريالية تماشوا جنباً إلى جنب. ولكن الرياضيات قد تم استخدامها كوسيلة لتحقيق سفلية ووضاعة الثقافات غير الأوروبية.

قامت أوروبا باستخدام ثلاث طرق لنشر المركزية الأوروبية فى الرياضيات.

١ـ قامت باستخدام إسهامات الثقافات غير الأوروبية وفى نفس الوقت أخفتها. لم يكن هناك أى تقدم قبل معجزة اليونان وأيضاً فى الفترة بين ذلك والنهضة الأوروبية فى القرن السادس عشر. وهذا هو المبدأ التقليدى للمركزية الأوروبية.



قامت أوروبا بتعريف الرياضيات بطريقة معينة وأعلنت أن مساهمات الحضارات الأخرى لم تكن رياضيات حقيقية.

فقد تم وصف الأساليب الرياضية غير الأوروبية بأنها كانت تعتمد على التجريب كليةً وبالتالى فهى ليست رياضيات تأملية حقيقية.



٣ـ وشرّعت أوروبا الرأى القائل بأن التطور الرياضى كان نتاجاً أوروبياً بصورة خالصة وقامت بتدريس ذلك فى تعليم الرياضيات.

جورج غيفرغيز يوسف عالم تاريخ الرياضيات وهو بريطانى آسيوى.

الرياضيات العرقية



فهى تهدف إلى إقامة علاقة قوية بين الرياضيات والثقافة والمجتمع وتذكرنا بأن الرياضيات تحتوى على أشياء أكثر من الدراسات المجردة النظرية الأفلاطونية ومناهج التدريس المشتقة منها. ويمكننا أن نرى المقدار الكبير الذى أثرت به أشكال الإبداع والابتكار فى الطرق المختلفة التى يتناول بها الأفراد المختلفون الأمور الرياضية.



لذلك فإن الرياضيات العرقية لا تتضمن الأنظمة الصياغية الرمزية فحسب ولكن أيضاً التصميم المكانى وطرق الإنشاء العملية وطرق الحساب والقياسات فى الزمن والمكان وطرق معينة للفهم والإشارة ونشاطات مادية ومعرفية أخرى.



الرياضيات ونوع الجنس

والنساء القلائل الذين أتيحت لهم فرصة المشاركة فى الرياضيات فى العصور الماضية كانوا مجرد طرفة. وأحد عالمات الرياضيات هى الفرنسية صوفى جيرماين (١٧٧٦ ـ ١٨٣١) والتى قدمت نفسها على أنها رجل رجل من خلال نقاشها مع عالم الرياضيات الألمانى «كارى فريدريك جاوس». (١٧٧٧ ـ ١٨٥٥).





وقد قدم علماء علم النفس العديد من الأسباب التى أدت إلى وضاعة النساء فى الرياضيات.

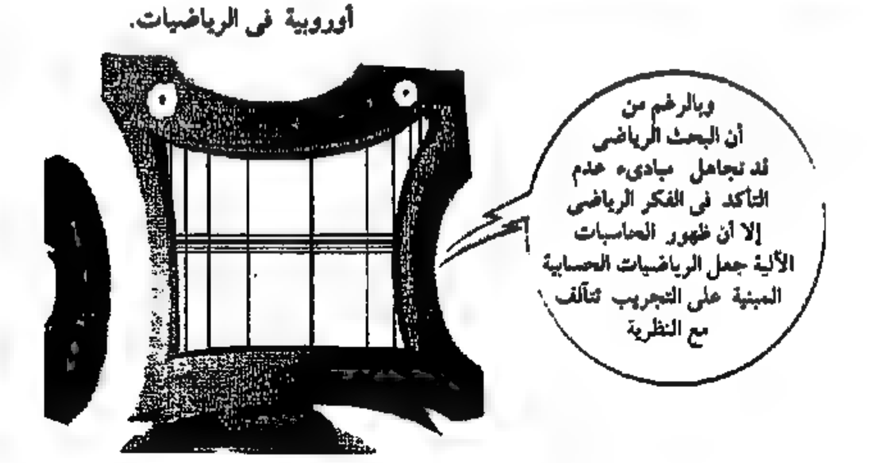


أين الآن

لقد سادت وجهة النظر الأفلاطونية للرياضيات فى الثقافة الغربية على مدى العصور.



ويقوم الفلاسفة والمدرسون والمشبعون بتقديم الرياضيات بهذه الوجهة الأفلاطونية .وتم تخيل العلم على أنه تطبيق للحقائق الرياضية . وكجزء من هذه الصورة ، تم تجاهل أو تشويه إساهمات الثقافات الغير أوروبية فى الرياضيات.



وبغض النظر عن انتشار معرفة القراءة والكتابة إلا أنها لا تزال مقتصرة على صفوة الاجتماعيين والمثقفين .



وتحت هذه الظروف فمن الضروري لنا أن نعرف ونقدر فشل الرياضيات (من خلال العلم) في انتزاع عدم التأكد من العالم العملي من حولنا .ومن الضروري أيضاً أن نعيد التفكير في المعرفة الحقيقية وكيفية تحققها.

لذلك فإن الرياضيات تواجه تحديات جديدة .وعلى المواطن أن يقوم بدوره في مواجهة هذه التحديات . ففي كلمات الأسقف بيركلي :كل واحد....



المحتويات

الموضوع	الصفحة
مقدمة	5
لماذا الرياضيات	9
الحساب	13
الأرقام المكتوبة	19
الصفر	30
أرقام خاصة	33
الأرقام الكبيرة	37
الأسس	39
اللوغاريتمات	43
الحساب Calculation	45
المعادلات	48
القياس	54
الرياضيات اليونانية	60
فيثاغورث	61
متناقضات «زينو».	63
إقليدس	65
الرياضيات الصينية	68
تشيو تشانج	70
أربعة علماء رياضيات صينيون	71
الرياضيات الهندية	74
هندسة «الفيدا»	75
براهما جوبتا	77
أرقام جاين	78
اندماجات «فيديك» و«جاين»	79
الشعر الرياضي	80

راما نوچان 82
الرياضيات الإسلامية 83
الخوارزمى 84
تطوير الجبر 85
اكتشاف حساب المثلثات 88
البطانى 89
أبو وفا 90
ابن يونس وثابت بن قرة 91
الطوسى 92
حل المسائل التى تتضمن أرقاماً صحيحة 93
نشأة الرياضيات الأوروبية 94
رينيه ديكارت 97
الهندسة التحليلية 99
الدوال 102
التفاضل والتكامل 107
التفاضل 108
التكامل 111
أسئلة بيركلى 117
إله أويلر 120
علوم الهندسة اللاإقليدية 124
الفضاءات نونية الأبعاد 126
إيفارست جالوا 128
المجموعات 129
العمليات الجبرية على الفئات 132
كانتور والفئات 135
أزمة فى الرياضيات 141
راسيل والحقيقة الرياضية 142
نظرية «جوديل» 145

ماكينة «تورينج».	147
الفراكتلات Fractals	149
نظرية العماء	151
الطبولوجي	153
نظرية الأرقام	155
الإحصاء	158
قيم ـ «أ»	160
الاحتمال	162
عدم التأكد	165
الأرقام السياسية	167
الرياضيات والمركزية الأوروبية	170
الرياضيات العرقية	172
الرياضيات ونوع الجنس	174
أين الآن؟	175
فهرس	178

المشروع القومى للترجمة

المشروع القومى للترجمة مشروع تنمية ثقافية بالدرجة الأولى، ينطلق من الإيجابيات التى حققتها مشروعات الترجمة التى سبقته فى مصر والعالم العربى ويسعى إلى الإضافة بما يفتح الأفق على وعود المستقبل، معتمداً المبادئ التالية :

١ - الخروج من أسر المركزية الأوروبية وهيمنة اللغتين الإنجليزية والفرنسية.

٢ - التوازن بين المعارف الإنسانية فى المجالات العلمية والفنية والفكرية والإبداعية.

٣ - الانحياز إلى كل ما يؤسس لأفكار التقدم وحضور العلم وإشاعة العقلانية والتشجيع على التجريب.

٤ - ترجمة الأصول المعرفية التى أصبحت أقرب إلى الإطار المرجعى فى الثقافة الإنسانية المعاصرة،جنبًا إلى جنب المنجزات الجديدة التى تضع القارئ فى القلب من حركة الإبداع والفكر العالميين.

٥ ـ العمل على إعداد جيل جديد من المترجمين المتخصصين عن طريق ورش العمل بالتنسيق مع لجنة الترجمة بالمجلس الأعلى للثقافة.

٦ - الاستعانة بكل الخبرات العربية وتنسيق الجهود مع المؤسسات المعنية بالترجمة.

المشروع القومى للترجمة

١- اللغة العليا (طبعة ثانية)	جون كوين	أحمد درويش
٢- الوثنية والإسلام	ك. مادهو بانيكار	ت: أحمد فؤاد بلبع
٣- التراث المسروق	جورج جيمس	ت: شوقى جلال
٤- كيف تتم كتابة السيناريو	انجا كاريتنكوفا	ت: أحمد الحضرى
٥- ثريا فى غيبوبة	إسماعيل فصيح	ت: محمد علاء الدين منصور
٦- اتجاهات البحث اللسانى	ميلكا إفيتش	ت: سعد مصلوح / وفاء كامل فايد
٧- العلوم الإنسانية والفلسفة	لوسيين غولدمن	ت: يوسف الأنطكى
٨- مشعلو الحرائق	ماكس فريش	ت: مصطفى ماهر
٩- التغيرات البيئية	أندرو س. جودى	ت: محمود محمد عاشور
١٠- خطاب الحكاية	جيرار جينيت	ت: محمد معتصم وعبد الجليل الأزدى وعمر حلى
١١- مختارات	فيسوافا شيمبوريسكا	ت: هناء عبد الفتاح
١٢- طريق الحرير	ديفيد بروانيستون وايرين فرانك	ت: أحمد محمود
١٣- ديانة الساميين	روبرتسن سميث	ت: عبد الوهاب علوب
١٤- التحليل النفسى للأدب	جان بيلمان نويل	ت: حسن المودن
١٥- الحركات الفنية	إدوارد لويس سميث	ت: أشرف رفيق عفيفى
١٦- أثينة السوداء	مارتن برنال	ت: بإشراف أحمد عتمان
١٧- مختارات	فيليب لاركين	ت: محمد مصطفى بدوى
١٨- الشعر النسائى فى أمريكا اللاتينية	مختارات	ت: طلعت شاهين
١٩- الأعمال الشعرية الكاملة	جورج سفيريس	ت: نعيم عطية
٢٠- قصة العلم	ج. ج. كراوثر	ت: يمنى طريف الخولى / بدوى عبد الفتاح
٢١- خوخة وألف خوخة	صمد بهرنجى	ت: ماجدة العنانى
٢٢- مذكرات رحالة عن المصريين	جون أنتيس	ت: سيد أحمد على الناصرى
٢٣- تجلى الجميل	هانز جيورج جادامر	ت: سعيد توفيق
٢٤- ظلال المستقبل	باتريك بارندر	ت: بكر عباس
٢٥- مثنوى	مولانا جلال الدين الرومى	ت: إبراهيم الدسوقى شتا
٢٦- دين مصر العام	محمد حسين هيكل	ت: أحمد محمد حسين هيكل
٢٧- التنوع البشرى الخلاق	مقالات	ت: نخبة
٢٨- رسالة فى التسامح	جون لوك	ت: منى أبو سنه
٢٩- الموت والوجود	جيمس ب. كارس	ت: بدر الديب
٣٠- الوثنية والإسلام (ط٢)	ك. مادهو بانيكار	ت: أحمد فؤاد بلبع
٣١- مصادر دراسة التاريخ الإسلامى	جان سوفاجيه - كلود كاين	ت: عبد الستار الحلوجى / عبد الوهاب علوب
٣٢- الانقراض	ديفيد روس	ت: مصطفى إبراهيم فهمى
٣٣- التاريخ الاقتصادى لإفريقيا الغربية	أ. ج. هوبكنز	ت: أحمد فؤاد بلبع
٣٤- الرواية العربية	روجر ألن	ت: حصة إبراهيم المنيف
٣٥- الأسطورة والحداثة	بول ب. ديكسون	ت: خليل كلفت

٣٦ نظريات السرد الحديثة	والاس مارتن	ت حياة جاسم محمد
٣٧- واحة سيوه وموسيقاها	بريجيت شيفر	ت جمال عبد الرحيم
٣٨- نقد الحداثة	آلن تورين	ت أنور مغيث
٣٩- الإغريق والحسد	بيتر والكوت	ت منيرة كروان
٤٠- قصائد حب	آن سكستون	ت محمد عيد إبراهيم
٤١ ما بعد المركزية الأوربية	بيتر جران	ت عاطف أحمد / إبراهيم فتحي / محمود ماجد
٤٢- عالم ماك	بنجامين بربر	ت أحمد محمود
٤٣- اللهب المزدوج	أوكتافيو باث	ت المهدي أخريف
٤٤- بعد عدة أصياف	ألدوس هكسلي	ت مارلين تادرس
٤٥- التراث المغدور	روبرت ج دنيا جون ف أ فاين	ت أحمد محمود
٤٦ عشرون قصيدة حب	بابلو نيرودا	ت محمود السيد علي
٤٧- تاريخ النقد الأدبي الحديث (١)	رينيه ويليك	ت مجاهد عبد المنعم مجاهد
٤٨- حضارة مصر الفرعونية	فرانسوا دوما	ت ماهر جويجاتي
٤٩- الإسلام في البلقان	هـ . ت . نوريس	ت عبد الوهاب علوب
٥٠- ألف ليلة وليلة أو القول الأسير	جمال الدين بن الشيخ	ت محمد برادة وعثماني الميلود ويوسف الأنطكي
٥١ مسار الرواية الإسبانو أمريكية	داريو بيانويبا وخ. م بينياليستي	ت : محمد أبو العطا
٥٢- العلاج النفسي التدعيمي	بيتر . ن . نوفاليس وستيفن . ج . روجسيفيز وروجر بل	ت لطفي فطيم وعادل دمرداش
٥٣- الدراما والتعليم	أ . ف . ألنجتون	ت مرسي سعد الدين
٥٤- المفهوم الإغريقي للمسرح	ج . مايكل والتون	ت محسن مصيلحي
٥٥ ما وراء العلم	چون بولكنجهوم	ت علي يوسف علي
٥٦- الأعمال الشعرية الكاملة (١)	فديريكو غرسية لوركا	ت محمود علي مكي
٥٧- الأعمال الشعرية الكاملة (٢)	فديريكو غرسية لوركا	ت محمود السيد ، ماهر البطوطي
٥٨ مسرحيتان	فديريكو غرسية لوركا	ت محمد أبو العطا
٥٩- المحبرة	كارلوس مونييث	ت السيد السيد سهيم
٦٠ التصميم والشكل	جوهانز ايتين	ت صبري محمد عبد الغني
٦١- موسوعة علم الإنسان	شارلوت سيمور - سميث	مراجعة وإشراف : محمد الجوهري
٦٢- لذّة النّص	رولان بارت	ت محمد خير البقاعي .
٦٣- تاريخ النقد الأدبي الحديث (٢)	رينيه ويليك	ت . مجاهد عبد المنعم مجاهد
٦٤- برتراند رسل (سيرة حياة)	آلان وود	ت رمسيس عوض
٦٥- في مدح الكسل ومقالات أخرى	برتراند راسل	ت رمسيس عوض .
٦٦ خمس مسرحيات أندلسية	أنطونيو جالا	ت . عبد اللطيف عبد الحليم
٦٧- مختارات	فرناندو بيسوا	ت المهدي أخريف
٦٨- نتاشا العجوز وقصص أخرى	فالنتين راسبوتين	ت أشرف الصباغ
٦٩ العالم الإسلامي في أوائل القرن العشرين	عبد الرشيد إبراهيم	ت أحمد فؤاد متولي وهويدا محمد فهمي
٧٠- ثقافة وحضارة أمريكا اللاتينية	أوخينيو تشانج رودريجث	ت عبد الحميد غلاب وأحمد حشاد
٧١- السيدة لا تصلح إلا للرمي	داريو فو	ت حسين محمود

٧٢-	السياسي العجوز	ت . س . إليوت	ت فؤاد مجلي
٧٣-	نقد استجابة القارئ	جين . ب . تومبكنز	ت حسن ناظم وعلي حاكم
٧٤-	صلاح الدين والمماليك في مصر	ل . ا . سيميونوفا	ت حسن بيومي
٧٥-	فن التراجم والسير الذاتية	أندريه موروا	ت أحمد درويش
٧٦-	جاك لاكان وإغواء التحليل النفسي	مجموعة من الكتاب	ت عبد المقصود عبد الكريم
٧٧-	تاريخ النقد الأدبي الحديث ج ٢	رينيه ويليك	ت مجاهد عبد المنعم مجاهد
٧٨-	العولمة: النظرية الاجتماعية والثقافة الكونية	رونالد روبرتسون	ت أحمد محمود ونورا أمين
٧٩	شعرية التأليف	بوريس أوسبنسكي	ت سعيد الغانمي وناصر حلاوي
٨٠	بوشكين عند «نافورة الدموع»	ألكسندر بوشكين	ت مكارم الغمري
٨١-	الجماعات المتخيلة	بندكت أندرسن	ت محمد طارق الشرقاوي
٨٢	مسرح ميجيل	ميجيل دي أونامونو	ت محمود السيد علي
٨٣-	مختارات	غوتفريد بن	ت خالد المعالي
٨٤	موسوعة الأدب والنقد	مجموعة من الكتاب	ت عبد الحميد شيحة
٨٥-	منصور الحلاج (مسرحية)	صلاح زكي أقطاي	ت عبد الرازق بركات
٨٦-	طول الليل	جمال مير صادقي	ت أحمد فتحي يوسف شتا
٨٧	نون والقلم	جلال آل أحمد	ت ماجدة العناني
٨٨-	الابتلاء بالتغرب	جلال آل أحمد	ت إبراهيم الدسوقي شتا
٨٩	الطريق الثالث	أنتوني جيدنز	ت أحمد زايد ومحمد محيي الدين
٩٠	وسم السيف	ميجل دي ثربانتس	ت محمد إبراهيم مبروك
٩١	المسرح والتجريب بين النظرية والتطبيق	باربرا لاسوتسكا	ت محمد هناء عبد الفتاح
٩٢	أساليب ومضامين المسرح الإسبانوأمريكي المعاصر	كارلوس ميجل	ت . نادية جمال الدين
٩٣-	محدثات العولمة	مايك فيذرستون وسكوت لاش	ت عبد الوهاب علوب
٩٤-	الحب الأول والصحبة	صمويل بيكيت	ت فوزية العشماوي
٩٥-	مختارات من المسرح الإسباني	أنطونيو بويرو باييخو	ت سري محمد محمد عبد اللطيف
٩٦	ثلاث زنبقات ووردة	قصص مختارة	ت إدوار الخراط
٩٧-	هوية فرنسا مج ١	فرنان برودل	ت بشير السباعي
٩٨-	الهم الإنساني والابتزاز الصهيوني	مقالات ومقالات	ت أشرف الصباغ
٩٩	تاريخ السينما العالمية	ديفيد روبنسون	ت إبراهيم قنديل
١٠٠-	مساءلة العولمة	بول هيرست وجراهام تومبسون	ت إبراهيم فتحي
١٠١	النص الروائي (تقنيات ومناهج)	بيرنار فاليط	ت رشيد بنحدو
١٠٢-	السياسة والتسامح	عبد الكريم الخطيبي	ت عز الدين الكتاني الإدريسي
١٠٣	قبر ابن عربي يليه آياء	عبد الوهاب المؤدب	ت محمد بنيس
١٠٤	أوبرا ماهوجني	برتولت بريشت	ت عبد الغفار مكاوي
١٠٥-	مدخل إلى النص الجامع	جيرار جينيت	ت عبد العزيز شبيل
١٠٦-	الأدب الأندلسي	د. ماريا خيسوس روبييرا متي	ت . د. أشرف علي دعدور
١٠٧	صورة الفدائي في الشعر الأمريكي المعاصر	مختارات	ت محمد عبد الله الجعيدي

١٠٨– ثلاث دراسات عن الشعر الأندلسي	مجموعة من النقاد	ت : محمود علي مكي
١٠٩– حروب المياه	جون بولوك وعادل درويش	ت : هاشم أحمد محمد
١١٠– النساء في العالم النامي	حسنة بيجوم	ت : منى قطان
١١١– المرأة والجريمة	فرانسيس هيندسون	ت : ريهام حسين إبراهيم
١١٢– الاحتجاج الهادئ	أرلين علوي ماكليود	ت : إكرام يوسف
١١٣– راية التمرد	سادي بلانت	ت : أحمد حسان
١١٤– مسرحيتا حصاد كونجي وسكان المستنقع	وول شوينكا	ت : نسيم مجلي
١١٥– غرفة تخص المرء وحده	فرجينيا وولف	ت : سمية رمضان
١١٦– امرأة مختلفة (درية شفيق)	سينثيا نلسون	ت : نهاد أحمد سالم
١١٧– المرأة والجنوسة في الإسلام	ليلى أحمد	ت : منى إبراهيم ، وهالة كمال
١١٨– النهضة النسائية في مصر	بث بارون	ت : لميس النقاش
١١٩– النساء والأسرة وقوانين الطلاق	أميرة الأزهري سنبل	ت : بإشراف/ رؤوف عباس
١٢٠– الحركة النسائية والتطور في الشرق الأوسط	ليلى أبو لغد	ت : نخبة من المترجمين
١٢١– الدليل الصغير عن الكاتبات العربيات	فاطمة موسى	ت : محمد الجندي ، وإيزابيل كمال
١٢٢– نظام العبودية القديم ونموذج الإنسان	جوزيف فوجت	ت : منيرة كروان
١٢٣– الإمبراطورية العثمانية وعلاقاتها الدولية	نينل الكسندر وفنادولينا	ت : أنور محمد إبراهيم
١٢٤– الفجر الكاذب	جون جراي	ت : أحمد فؤاد بلبع
١٢٥– التحليل الموسيقي	سيدريك ثورپ ديڤي	ت : سمحة الخولي
١٢٦– فعل القراءة	فولفانج إيسر	ت : عبد الوهاب علوب
١٢٧– إرهاب	صفاء فتحي	ت : بشير السباعي
١٢٨– الأدب المقارن	سوزان باسنيت	ت : أميرة حسن نويرة
١٢٩– الرواية الإسبانية المعاصرة	ماريا دولورس أسيس جاروته	ت : محمد أبو العطا وآخرون
١٣٠– الشرق يصعد ثانية	أندريه جوندر فرانك	ت : شوقي جلال
١٣١– مصر القديمة (التاريخ الاجتماعي)	مجموعة من المؤلفين	ت : لويس بقطر
١٣٢– ثقافة العولمة	مايك فيذرستون	ت : عبد الوهاب علوب
١٣٣– الخوف من المرايا	طارق علي	ت : طلعت الشايب
١٣٤– تشريح حضارة	باري ج. كيمب	ت : أحمد محمود
١٣٥– المختار من نقد ت. س. إليوت	ت. س. إليوت	ت : ماهر شفيق فريد
١٣٦– فلاحو الباشا	كينيث كونو	ت : سحر توفيق
١٣٧– مذكرات ضابط في الحملة الفرنسية	جوزيف ماري مواريه	ت : كاميليا صبحي
١٣٨– عالم التليفزيون بين الجمال والعنف	إيڤلينا تاروني	ت : وجيه سمعان عبد المسيح
١٣٩– پارسيفال	ريشارد فاجنر	ت : مصطفى ماهر
١٤٠– حيث تلتقي الأنهار	هربرت ميسن	ت : أمل الجبوري
١٤١– اثنتا عشرة مسرحية يونانية	مجموعة من المؤلفين	ت : نعيم عطية
١٤٢– الإسكندرية ، تاريخ ودليل	أ. م. فورستر	ت : حسن بيومي
١٤٣– قضايا التنظير في البحث الاجتماعي	ديريك لايدار	ت : عدلي السمري
١٤٤– صاحبة اللوكاندة	كارلو جولدوني	ت : سلامه محمد سليمان

١٤٥- موت أرتيميو كروث	كارلوس فوينتس	ت : أحمد حسان
١٤٦- الورقة الحمراء	ميجيل دي ليبس	ت : علي عبدالرؤوف البمبي
١٤٧- خطبة الإدانة الطويلة	تانكريد دورست	ت : عبدالغفار مكاوي
١٤٨- القصة القصيرة (النظرية والتقنية)	إنريكي أندرسون إمبرت	ت : علي إبراهيم علي منوفي
١٤٩- النظرية الشعرية عند إليوت وأدونيس	عاطف فضول	ت : أسامه إسبر
١٥٠- التجربة الإغريقية	روبرت ج. ليتمان	ت : منيرة كروان
١٥١- هوية فرنسا مج ٢، ج١	فرنان بروديل	ت : بشير السباعي
١٥٢- عدالة الهنود وقصص أخرى	نخبة من الكتاب	ت : محمد محمد الخطابي
١٥٣- غرام الفراعنة	فيولين فانويك	ت : فاطمة عبدالله محمود
١٥٤- مدرسة فرانكفورت	فيل سليتر	ت : خليل كلفت
١٥٥- الشعر الأمريكي المعاصر	نخبة من الشعراء	ت : أحمد مرسي
١٥٦- المدارس الجمالية الكبرى	جي أتيال وآلان وأوديت فيرمو	ت : مي التلمساني
١٥٧- خسرو وشيرين	النظامي الكنوجي	ت : عبدالعزيز بقوش
١٥٨- هوية فرنسا مج ٢، ج٢	فرنان بروديل	ت : بشير السباعي
١٥٩- الإيديولوجية	ديفيد هوكس	ت: إبراهيم فتحي
١٦٠- آلة الطبيعة	بول إيرليش	ت: حسين بيومي
١٦١- من المسرح الإسباني	اليخاندرو كاسونا وأنطونيو جالا	ت: زيدان عبدالحليم زيدان
١٦٢- تاريخ الكنيسة	يوحنا الأسيوي	ت: صلاح عبدالعزيز محجوب
١٦٣- موسوعة علم الاجتماع	جوردن مارشال	ت: بإشراف محمد الجوهري
١٦٤- شامبليون (حياة من نور)	جان لاكوتير	ت: نبيل سعد
١٦٥- حكايات الثعلب	أ. ن أفانا سيفا	ت: سهير المصادفة
١٦٦- العلاقات بين المتدينين والعلمانيين في إسرائيل	يشعياهو ليفمان	ت: محمد محمود أبو غدير
١٦٧- في عالم طاغور	رابندرانات طاغور	ت: شكري محمد عياد
١٦٨- دراسات في الأدب والثقافة	مجموعة من المؤلفين	ت: شكري محمد عياد
١٦٩- إبداعات أدبية	مجموعة من المبدعين	ت: شكري محمد عياد
١٧٠- الطريق	ميغيل دليبيس	ت: بسام ياسين رشيد
١٧١- وضع حد	فرانك بيجو	ت: هدى حسين
١٧٢- حجر الشمس	مختارات	ت: محمد محمد الخطابي
١٧٣- معنى الجمال	ولتر ت. ستيس	ت: إمام عبد الفتاح إمام
١٧٤- صناعة الثقافة السوداء	ايليس كاشمور	ت: أحمد محمود
١٧٥- التليفزيون في الحياة اليومية	لورينزو فيلشس	ت: وجيه سمعان عبد المسيح
١٧٦- نحو مفهوم للاقتصاديات البيئية	توم تيتنبرج	ت: جلال البنا
١٧٧- أنطون تشيخوف	هنري ترويا	ت: حصة إبراهيم المنيف
١٧٨- مختارات من الشعر اليوناني الحديث	نخبة من الشعراء	ت: محمد حمدي إبراهيم
١٧٩- حكايات أيسوب	أيسوب	ت: إمام عبد الفتاح إمام
١٨٠- قصة جاويد	إسماعيل فصيح	ت: سليم عبد الأمير حمدان
١٨١- النقد الأدبي الأمريكي	فنسنت ب. ليتش	ت: محمد يحيى

١٨٢- العنف والنبوءة	و. ب. ييتس	ت. ياسين طه حافظ
١٨٣- جان كوكتو على شاشة السينما	رينيه جيلسون	ت. فتحي العشري
١٨٤- القاهرة.. حالمة لا تنام	هانز إيندورفر	ت. دسوقي سعيد
١٨٥- أسفار العهد القديم	توماس تومسن	ت. عبد الوهاب علوب
١٨٦- معجم مصطلحات هيجل	ميخائيل إنوود	ت. إمام عبد الفتاح إمام
١٨٧- الأرضة	بُزُرج علوي	ت. محمد علاء الدين منصور
١٨٨- موت الأدب	ألفين كرنان	ت. بدر الديب
١٨٩- العمى والبصيرة	بول دي مان	ت. سعيد الغانمي
١٩٠- محاورات كونفوشيوس	كونفوشيوس	ت. محسن سيد فرجاني
١٩١- الكلام رأسمال	الحاج أبو بكر إمام	ت. مصطفى حجازي السيد
١٩٢- رحلة إبراهيم بك جـ١	زين العابدين المراغي	ت. محمود سلامة علاوي
١٩٣- عامل المنجم	بيتر أبراهامز	ت. محمد عبد الواحد محمد
١٩٤- مختارات من النقد الأنجلو-أمريكي	مجموعة من النقاد	ت. ماهر شفيق فريد
١٩٥- شتاء ٨٤	إسماعيل فصيح	ت. محمد علاء الدين منصور
١٩٦- المهلة الأخيرة	فالنتين راسبوتين	ت. أشرف الصباغ
١٩٧- الفاروق	شمس العلماء شبلي النعماني	ت. جلال السعيد الحفناوي
١٩٨- الاتصال الجماهيري	إدوين إمري وآخرون	ت. إبراهيم سلامة إبراهيم
١٩٩- تاريخ يهود مصر في الفترة العثمانية	يعقوب لانداوي	ت. جمال أحمد الرفاعي وأحمد عبد اللطيف حماد
٢٠٠- ضحايا التنمية	جيرمي سيبروك	ت. فخري لبيب
٢٠١- الجانب الديني للفلسفة	جوزايا رويس	ت. أحمد الأنصاري
٢٠٢- تاريخ النقد الأدبي الحديث جـ٤	رينيه ويليك	ت. مجاهد عبد المنعم مجاهد
٢٠٣- الشعر والشاعرية	ألطاف حسين حالي	ت. جلال السعيد الحفناوي
٢٠٤- تاريخ نقد العهد القديم	زالمان شازار	ت. أحمد محمود هويدي
٢٠٥- الجينات والشعوب واللغات	لويجي لوقا كافالي- سفورزا	ت. أحمد مستجير
٢٠٦- الهيولية تصنع علماً جديداً	جيمس جلايك	ت. علي يوسف علي
٢٠٧- ليل إفريقي	رامون خوتاسندير	ت. محمد أبو العطا عبد الرؤوف
٢٠٨- شخصية العربي في المسرح الإسرائيلي	دان أوريان	ت. محمد أحمد صالح
٢٠٩- السرد والمسرح	مجموعة من المؤلفين	ت. أشرف الصباغ
٢١٠- مثنويات حكيم سنائي	سنائي الغزنوي	ت. يوسف عبد الفتاح فرج
٢١١- فردينان دوسوسير	جوناثان كلر	ت. محمود حمدي عبد الغني
٢١٢- قصص الأمير مرزبان	مرزبان بن رستم بن شروين	ت. يوسف عبد الفتاح فرج
٢١٣- مصر منذ قدوم نابليون حتى رحيل عبد الناصر	ريمون فلاور	ت. سيد أحمد علي الناصري
٢١٤- قواعد جديدة للمنهج في علم الاجتماع	أنتوني جيدنز	ت. محمد محمود محيي الدين
٢١٥- سياحت نامه إبراهيم بيك جـ٢	زين العابدين المراغي	ت. محمود سلامة علاوي
٢١٦- جوانب أخرى من حياتهم	مجموعة من المؤلفين	ت. أشرف الصباغ
٢١٧- مسرحيتان طليعيتان	صمويل بيكيت	ت. نادية البنهاوي
٢١٨- رايولا	خوليو كورتازار	ت. علي إبراهيم علي منوفي

٢١٩ بقايا اليوم	كازو ايشجورو	ت. طلعت الشايب
٢٢٠ الهيولية في الكون	باري باركر	ت. علي يوسف علي
٢٢١ شعرية كفافي	جريجوري جوزدانيس	ت. رفعت سلام
٢٢٢– فرانز كافكا	رونالد جري	ت. بسيم مجلي
٢٢٣– العلم في مجتمع حر	بول فيرابند	ت. السيد محمد نفادي
٢٢٤– دمار يوغسلافيا	برانكا ماجاس	ت. منى عبدالظاهر إبراهيم السيد
٢٢٥– حكاية غريق	جابرييل جارثيا ماركث	ت. السيد عبد الظاهر السيد
٢٢٦– أرض المساء وقصائد أخرى	ديفيد هربرت لورانس	ت. طاهر محمد علي البربري
٢٢٧– المسرح الإسباني في القرن السابع عشر	موسى ماردينا ديف بوركي	ت. السيد عبد الظاهر عبدالله
٢٢٨ علم الجمالية وعلم اجتماع الفن	جانيت وولف	ت. ماري تيريز عبدالمسيح وخالد حسن
٢٢٩– مأزق البطل الوحيد	نورمان كيجان	ت. أمير إبراهيم العمري
٢٣٠– عن الذباب والفئران والبشر	فرانسواز جاكوب	ت. مصطفى إبراهيم فهمي
٢٣١– الدرافيل	خايمي سالوم بيدال	ت. جمال أحمد عبدالرحمن
٢٣٢– ما بعد المعلومات	توم ستينر	ت. مصطفى إبراهيم فهمي
٢٣٣– فكرة الاضمحلال	آرثر هيرمان	ت. طلعت الشايب
٢٣٤– الإسلام في السودان	ج. سبنسر تريمنجهام	ت. فؤاد محمد عكود
٢٣٥ ديوان شمس تبريزي ج١	جلال الدين مولوي رومي	ت. إبراهيم الدسوقي شتا
٢٣٦– الولاية	ميشيل تود	ت. أحمد الطيب
٢٣٧– مصر أرض الوادي	روبين فيدين	ت. عنايات حسين طلعت
٢٣٨– العولمة والتحرير	لانكتاد	ت. ياسر محمد جادالله وعربي مدبولي أحمد
٢٣٩– العربي في الأدب الإسرائيلي	جيلا رامراز – رايوخ	ت. نادية سليمان حافظ وإيهاب صلاح فايق
٢٤٠– الإسلام والغرب وإمكانية الحوار	كامي حافظ	ت. صلاح عبدالعزيز محجوب
٢٤١– في انتظار البرابرة	ج. م. كويتز	ت. ابتسام عبد الله سعيد
٢٤٢– سبعة أنماط من الغموض	وليام إمبسون	ت. صبري محمد حسن عبد النبي
٢٤٣– تاريخ إسبانيا الإسلامية جـ١	ليفي بروفنسال	ت. علي عبدالرؤوف البمبي
٢٤٤– الغليان	لاورا إسكيبيل	ت. نادية جمال الدين محمد
٢٤٥ نساء مقاتلات	إليزابيث آديس	ت. توفيق علي منصور
٢٤٦– مختارات قصصية	جابرييل جارثيا ماركث	ت. علي إبراهيم علي منوفي
٢٤٧– الثقافة الجماهيرية والحداثة في مصر	والتر إرمبريست	ت. محمد طارق الشرقاوي
٢٤٨ حقول عدن الخضراء	أنطونيو جالا	ت. عبد اللطيف عبدالحليم عبدالله
٢٤٩– لغة التمزق	دراجو شتامبوك	ت. رفعت سلام
٢٥٠– علم اجتماع العلوم	دومنيك فينك	ت. ماجدة محسن أباظة
٢٥١ موسوعة علم الاجتماع (ج٢)	جوردن مارشال	ت. بإشراف: محمد الجوهري
٢٥٢– رائدات الحركة النسوية المصرية	مارجو بدران	ت. علي بدران
٢٥٣– تاريخ مصر الفاطمية	ل. أ. سيمينوفا	ت. حسن بيومي
٢٥٤– الفلسفة	ديف روبنسون وجودي جروفز	ت. إمام عبد الفتاح إمام
٢٥٥– أفلاطون	ديف روبنسون وجودي جروفز	ت. إمام عبد الفتاح إمام

٢٥٦- ديكارت	ديف روبنسون ، كريس جرات	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٢٥٧- تاريخ الفلسفة الحديثة	وليم كلي رايت	ت: محمود سيد أحمد
٢٥٨- الفجر	سير أنجوس فريزر	ت: عُباده كُحيلة
٢٥٩- مختارات من الشعر الأرمني عبر العصور	أقلام مختلفة	ت: فاروجان كازانجيان
٢٦٠- موسوعة علم الاجتماع ج٢	جوردن مارشال	ت: بإشراف: محمد الجوهري
٢٦١- رحلة في فكر زكي نجيب محمود	زكي نجيب محمود	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٢٦٢- مدينة المعجزات	إدوارد منديثا	ت: محمد أبو العطا عبد الرؤوف
٢٦٣- الكشف عن حافة الزمن	جون جريبين	ت: علي يوسف علي
٢٦٤- إبداعات شعرية مترجمة	هوراس / شلي	ت: لويس عوض
٢٦٥- روايات مترجمة	أوسكار وايلد وصموئيل جونسون	ت: لويس عوض
٢٦٦- مدير المدرسة	جلال آل أحمد	ت: عادل عبدالمنعم سويلم
٢٦٧- فن الرواية	ديفيد لودج	ت: ماهر البطوطي
٢٦٨- ديوان شمس تبريزي ج٢	جلال الدين الرومي	ت: إبراهيم الدسوقي شتا
٢٦٩- وسط الجزيرة العربية وشرقها ج١	وليم جيفور بالجريف	ت: صبري محمد حسن
٢٧٠- وسط الجزيرة العربية وشرقها ج٢	وليم جيفور بالجريف	ت: صبري محمد حسن
٢٧١- الحضارة الغربية	توماس سي. باترسون	ت: شوقي جلال
٢٧٢- الأديرة الأثرية في مصر	س. س والترز	ت: إبراهيم سلامة
٢٧٣- الاستعمار والثورة في الشرق الأوسط	جوان أر. لوك	ت: عنان الشهاوي
٢٧٤- السيدة باربارا	رومولو جالجوس	ت: محمود مكي
٢٧٥- ت. س إليوت شاعرا وناقدا وكاتبا مسرحيا	أقلام مختلفة	ت: ماهر شفيق فريد
٢٧٦- فنون السينما	فرانك جوتيران	ت: عبد القادر التلمساني
٢٧٧- الجينات: الصراع من أجل الحياة	بريان فورد	ت: أحمد فوزي
٢٧٨- البدايات	إسحق عظيموف	ت: ظريف عبدالله
٢٧٩- الحرب الباردة الثقافية	ف.س. سوندرز	ت: طلعت الشايب
٢٨٠- من الأدب الهندي الحديث والمعاصر	بريم شند وآخرون	ت: سمير عبدالحميد
٢٨١- الفردوس الأعلى	مولانا عبد الحليم شرر الكهنوي	ت: جلال الحفناوي
٢٨٢- طبيعة العلم غير الطبيعية	لويس ولبيرت	ت: سمير حنا صادق
٢٨٣- السهل يحترق	خوان رولفو	ت: علي البمبي
٢٨٤- هرقل مجنونا	يوريبيدس	ت: أحمد عتمان
٢٨٥- رحلة الخواجة حسن نظامي	حسن نظامي	ت: سمير عبد الحميد
٢٨٦- رحلة إبراهيم بك ج٢	زين العابدين المراغي	ت: محمود سلامة علاوي
٢٨٧- الثقافة والعولمة والنظام العالمي	أنتوني كنج	ت: محمد يحيى وآخرون
٢٨٨- الفن الروائي	ديفيد لودج	ت: ماهر البطوطي
٢٨٩- ديوان منجوهري الدامغاني	أبو نجم أحمد بن قوص	ت: محمد نور الدين عبدالمنعم
٢٩٠- علم اللغة والترجمة	جورج مونان	ت: أحمد زكريا إبراهيم
٢٩١- المسرح الإسباني في القرن العشرين ج١	فرانشسكو رويس رامون	ت: السيد عبد الظاهر
٢٩٢- المسرح الإسباني في القرن العشرين ج٢	فرانشسكو رويس رامون	ت: السيد عبد الظاهر

٢٩٣- مقدمة للأدب العربى	روجر آلان	ت: نخبة من المترجمين
٢٩٤- فن الشعر	بوالو	ت: رجاء ياقوت صالح
٢٩٥- سلطان الأسطورة	جوزيف كامبل	ت: بدر الدين حب الله الديب
٢٩٦- مكبث	وليم شكسبير	ت: محمد مصطفى بدوى
٢٩٧- فن النحو بين اليونانية والسريانية	ديونيسيوس ثراكس – يوسف الأهوانى	ت: ماجدة محمد أنور
٢٩٨- مأساة العبيد	أبو بكر تفاوابليوه	ت: مصطفى حجازى السيد
٢٩٩- ثورة التكنولوجيا الحيوية	جين ل. ماركس	ت: هاشم أحمد فؤاد
٣٠٠- أسطورة بروميثيوس مج١	لويس عوض	ت: جمال الجزيرى وبهاء چاهين
٣٠١- أسطورة بروميثيوس مج٢	لويس عوض	ت: جمال الجزيرى و محمد الجندى
٣٠٢- فتجنشتين	جون هيتون وجودى جروفز	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٣- بوذا	جين هوب وبورن فان لون	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٤- ماركس	ريوس	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٥- الجلد	كروزيو مالابارته	ت: صلاح عبد الصبور
٣٠٦- الحماسة - النقد الكانطى للتاريخ	جان – فرانسوا ليوتار	ت: نبيل سعد
٣٠٧- الشعور	ديفيد بابينو	ت: محمود محمد أحمد
٣٠٨- علم الوراثة	ستيف جونز	ت: ممدوح عبد المنعم أحمد
٣٠٩- الذهن والمخ	أنجوس جيلاتى	ت: جمال الجزيرى
٣١٠- يونج	ناجى هيد	ت: محيى الدين محمد حسن
٣١١- مقال فى المنهج الفلسفى	كولنجوود	ت: فاطمة إسماعيل
٣١٢- روح الشعب الأسود	وليم دى بويز	ت:أسعد حليم
٣١٣- أمثال فلسطينية	خايير بيان	ت: عبدالله الجعيدى
٣١٤- الفن كعدم	جينس ميتيك	ت: هويدا السباعى
٣١٥- جرامشى فى العالم العربى	ميشيل بروندينو	ت: كاميليا صبحى
٣١٦- محاكمة سقراط	أ.ف. ستون	ت: نسيم مجلى
٣١٧- بلا غد	شير لايموفا- زنيكين	ت: أشرف الصباغ
٣١٨- الأدب الروسى فى السنوات العشر الأخيرة	نخبة	ت: أشرف الصباغ
٣١٩- صور دريدا	جايتر ياسبيفاك وكرستوفر نوريس	ت: حسام نايل
٣٢٠- لمعة السراج فى حضرة التاج	محمد روشن	ت: محمد علاء الدين منصور
٣٢١- تاريخ إسبانيا الإسلامية ج٢	ليفى برو فنسال	ت: نخبة من المترجمين
٣٢٢- وجهات غربية حديثة فى تاريخ الفن	دبليو يوجين كلينباور	ت: خالد مفلح حمزه
٣٢٣- فن الساتورا	تراث يونانى قديم	ت: هانم سليمان
٣٢٤- اللعب بالنار	أشرف أسدى	ت: محمود سلامة علاوى
٣٢٥- عالم الآثار	فيليب بوسان	ت: كرستين يوسف
٣٢٦- المعرفة والمصلحة	يورجين هابرماس	ت: حسن صقر
٣٢٧- مختارات شعرية مترجمة	نخبة	ت: توفيق على منصور
٣٢٨- يوسف وزليخا	نور الدين عبد الرحمن بن أحمد	ت: عبد العزيز بقوش
٣٢٩- رسائل عيد الميلاد	تد هيوز	ت: محمد عيد إبراهيم
٣٣٠- كل شىء عن التمثيل الصامت	مارفن شبرد	ت: سامى صلاح

٢٣١- عندما جاء السردين	ستيفن جراى	ت: سامية دياب
٢٣٢- القصة القصيرة فى إسبانيا	نخبة	ت: على إبراهيم على منوفي
٢٣٣- الإسلام فى بريطانيا	نبيل مطر	ت: بكر عباس
٢٣٤- لقطات من المستقبل	آرثر س كلارك	ت: مصطفى فهمى
٢٣٥- عصر الشك	ناتالى ساروت	ت: فتحى العشرى
٢٣٦- متون الأهرام	نصوص قديمة	ت: حسن صابر
٢٣٧- فلسفة الولاء	جوزايا رويس	ت: أحمد الأنصارى
٢٣٨- قصص قصيرة من الهند	نخبة	ت: جلال السعيد الحفناوى
٢٣٩- تاريخ الأدب فى إيران جـ٣	على أصغر حكمت	ت: محمد علاء الدين منصور
٢٤٠- اضطراب فى الشرق الأوسط	بيرش بيربيروجلو	ت: فخرى لبيب
٢٤١- قصائد من رلكه	راينر ماريا رلكه	ت: حسن حلمى
٢٤٢- سلامان وأبسال	نور الدين عبدالرحمن بن أحمد	ت: عبد العزيز بقوش
٢٤٣- العالم البرجوازى الزائل	نادين جورديمر	ت: سمير عبد ربه
٢٤٤- الموت فى الشمس	بيتر بلانجوه	ت: سمير عبد ربه
٢٤٥- الركض خلف الزمن	بونه نداى	ت: يوسف عبد الفتاح فرج
٢٤٦- سحر مصر	رشاد رشدى	ت: جمال الجزيرى
٢٤٧- الصبية الطائشون	جان كوكتو	ت: بكر الحلو
٢٤٨- المتصوفة الأولون فى الأدب التركى جـ١	محمد فؤاد كوبريلى	ت: عبدالله أحمد إبراهيم
٢٤٩- دليل القارئ إلى الثقافة الجادة	آرثر والدرون وآخرون	ت: أحمد عمر شاهين
٢٥٠- بانوراما الحياة السياحية	أقلام مختلفة	ت: عطية شحاتة
٢٥١- مبادئ المنطق	جوزايا رويس	ت: أحمد الانصارى
٢٥٢- قصائد من كفافيس	قسطنطين كفافيس	ت: نعيم عطية
٢٥٣- الفن الإسلامى فى الأندلس (الزخرفة الهندسية)	باسيليو بابون مالدونالد	ت: على إبراهيم على منوفى
٢٥٤- الفن الإسلامى فى الأندلس (الزخرفة النباتية)	باسيليو بابون مالدونالد	ت: على إبراهيم على منوفى
٢٥٥- التيارات السياسية فى إيران	حجت مرتضى	ت: محمود سلامة علاوى
٢٥٦- الميراث المر	بول سالم	ت: بدر الرفاعى
٢٥٧- متون هيرميس	نصوص قديمة	ت: عمر الفاروق عمر
٢٥٨- أمثال الهوسا العامية	نخبة	ت: مصطفى حجازى السيد
٢٥٩- محاورات بارمنيدس	أفلاطون	ت: حبيب الشارونى
٢٦٠- أنثروبولوجيا اللغة	أندريه جاكوب ونويلا باركان	ت: ليلى الشربينى
٢٦١- التصحر: التهديد والمجابهة	آلان جرينجر	ت: عاطف معتمد وآمال شاور
٢٦٢- تلميذ بابنبيرج	هاينرش شبورال	ت: سيد أحمد فتح الله
٢٦٣- حركات التحرر الأفريقى	ريتشارد جيبسون	ت: صبرى محمد حسن
٢٦٤- حداثة شكسبير	إسماعيل سراج الدين	ت: نجلاء أبو عجاج
٢٦٥- سأم باريس	شارل بودلير	ت: محمد أحمد حمد
٢٦٦- نساء يركضن مع الذئاب	كلاريسا بنكولا	ت: مصطفى محمود محمد
٢٦٧- القلم الجرىء	نخبة	ت: البراق عبدالهادى رضا
٢٦٨- المصطلح السردى	جيرالد برنس	ت: عابد خزندار

٢٦٩- المرأة في أدب نجيب محفوظ	فوزية العشماوي	ت: فوزية العشماوي
٢٧٠- الفن والحياة في مصر الفرعونية	كليرلا لويت	ت: فاطمة عبدالله محمود
٢٧١- المتصوفة الأولون في الأدب التركي ج٢	محمد فؤاد كوبريلي	ت: عبدالله أحمد إبراهيم
٢٧٢- عاش الشباب	وانغ مينغ	ت: وحيد السعيد عبدالحميد
٢٧٣- كيف تعد رسالة دكتوراه	أمبرتو إيكو	ت: علي إبراهيم علي منوفي
٢٧٤- اليوم السادس	أندريه شديد	ت: حمادة إبراهيم
٢٧٥- الخلود	ميلان كونديرا	ت: خالد أبو اليزيد
٢٧٦- الغضب وأحلام السنين	نخبة	ت: إدوار الخراط
٢٧٧- تاريخ الأدب في إيران جـ٤	علي أصغر حكمت	ت: محمد علاء الدين منصور
٢٧٨- المسافر	محمد إقبال	ت: يوسف عبدالفتاح فرج
٢٧٩- ملك في الحديقة	سنيل بات	ت: جمال عبدالرحمن
٢٨٠- حديث عن الخسارة	جونتر جراس	ت: شيرين عبدالسلام
٢٨١- أساسيات اللغة	ر. ل. تراسك	ت: رانيا إبراهيم يوسف
٢٨٢- تاريخ طبرستان	بهاء الدين محمد إسفنديار	ت: أحمد محمد نادي
٢٨٣- هدية الحجاز	محمد إقبال	ت: سمير عبدالحميد إبراهيم
٢٨٤- القصص التي يحكيها الأطفال	سوزان إنجيل	ت: إيزابيل كمال
٢٨٥- مشترى العشق	محمد علي بهزادراد	ت: يوسف عبدالفتاح فرج
٢٨٦- دفاعًا عن التاريخ الأدبي النسوي	جانيت تود	ت: ريهام حسين إبراهيم
٢٨٧- أغنيات وسوناتات	جون دن	ت: بهاء جاهين
٢٨٨- مواعظ سعدي الشيرازي	سعدي الشيرازي	ت: محمد علاء الدين منصور
٢٨٩- من الأدب الباكستاني المعاصر	نخبة	ت: سمير عبدالحميد إبراهيم
٢٩٠- الأرشيفات والمدن الكبرى	نخبة	ت: عثمان مصطفى عثمان
٢٩١- الحافلة الليلكية	مايف بينشي	ت: منى الدروبي
٢٩٢- مقامات ورسائل أندلسية	نخبة	ت: عبداللطيف عبدالحليم
٢٩٣- في قلب الشرق	ندوة لويس ماسينيون	ت: نخبة
٢٩٤- القوى الأساسية الأربع في الكون	بول ديفيز	ت: هاشم أحمد محمد
٢٩٥- آلام سياوش	إسماعيل فصيح	ت: سليم حمدان
٢٩٦- السافاك	تقي نجاري راد	ت: محمود سلامة علاوي
٢٩٧- نيتشه	لورانس جين	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٢٩٨- سارتر	فيليب تودي	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٢٩٩- كامي	ديفيد ميروفتس	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٤٠٠- مومو	مشيائيل إنده	ت: باهر الجوهري
٤٠١- الرياضيات	زيادون ساردر	ت: ممدوح عبد المنعم

التنفيذ والطباعة: Stampa

11 ميدان سفنكس - المهندسين

تليفون: 3448824 - 3034408